

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛ. ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
ТУРНИР ПО МАТЕМАТИКА ЗА КУПАТА НА ФАКУЛТЕТА
4 февруари 2007 г.

Зад. 1. Да се намерят всички квадратни функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, графиките на които минават през точките с координати $(0, 3)$ и $(3, 3)$ и които имат най-малка стойност, равна на $\frac{3}{4}$.

Зад. 2. В триъгълник ABC медианата през върха A и ъглополовящата през върха B са взаимно перпендикулярни. Да се намерят дължините на страните на триъгълника, ако те са последователни цели числа.

Зад. 3. Да се реши системата уравнения

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ 2^x - 3 \cdot 2^y + 2 = 0 \end{cases}$$

Зад. 4. Да се намерят страните AC и BC на триъгълник ABC , ако $AB = 7$, радиусът на описаната около триъгълника окръжност е $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ и лицето му е $S = 10\sqrt{3}$.

Зад. 5. Да се докаже, че уравнението

$$\log_2 2x \cdot \log_2 5x = -\frac{1}{4}$$

има два различни реални корена и да се намери произведението им.

Зад. 6. Нека a и b са положителни рационални числа, $a \neq 1$, $b \neq 1$ и ab не е квадрат на рационално число. Да се докаже, че числото $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{ab}$ не е рационално.

Зад. 7. Дължините на всички страни на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ са по-малки от 1. Да се докаже, че за всяка вътрешна за четириъгълника точка M съществува негов връх X , такъв че $MX < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Зад. 8. Да се намерят всички естествени числа n , за които функцията

$$f(x) = \sin nx \cdot \sin^n x + \cos nx \cdot \cos^n x - \cos^n 2x$$

е константа.

Зад. 9. Основата $ABCD$ на четириъгълна пирамида $ABCDM$ е квадрат със страна 1 и двойките срещуположни околни стени са взаимно перпендикулярни. Да се намери обемът на пирамидата, ако най-късият околнен ръб съдържа с основата ъгъл с големина 45° .

Зад. 10. Нека $f(x)$ е полином с цели коефициенти, който приема стойност 2007 за шест различни цели стойности на x . Да се докаже, че $f(x)$ няма цели корени.

Време за работа 5 часа.

Журието Ви желае успешна работа!