

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛ. ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
ТУРНИР ПО МАТЕМАТИКА ЗА КУПАТА НА ФАКУЛТЕТА
Втори кръг, 4 март 2007 г.

Зад. 1. Да се намерят най-малката и най-голямата стойност на функцията $\sqrt{1-x} + \sqrt{1-y}$ при условие, че $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ и $x^2 + y^2 = 1$.

Зад. 2. Всички корени на полинома

$$f(x) = x^n + x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$

са реални и неположителни. Да се докаже, че за всяко $x \geq 0$ е изпълнено неравенството

$$f(x) \leq \left(x + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Зад. 3. Нека $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}$ са произволни положителни числа и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_{2n-1} \geq b_{2n}$ са същите числа, подредени по големина. Да се докаже, че за всяко $t \geq 0$ е в сила неравенството

$$(a_1a_2 + t)(a_3a_4 + t) \dots (a_{2n-1}a_{2n} + t) \leq (b_1b_2 + t)(b_3b_4 + t) \dots (b_{2n-1}b_{2n} + t).$$

Зад. 4. Да се намерят всички триъгълници, дължините на страните на които са цели числа и дължините на радиусите на вписаната и описаната им окръжности са прости числа.

Зад. 5. Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворява условията $a_1 > 0$ и $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$ за всяко естествено число n . Да се намери границата

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_{n+1}} \right).$$

Всяка задача се оценява с 8 точки.

Време за работа 5 часа.

Журито Ви желае успешна работа!