

Първо контролно
за определяне на национален отбор за участие в БОМ2008
и отбор за участие във Всерусийска олимпиада
ИМИ-БАН, София, 31.03.2008 г.

Задача 1. В k от върховете на правилен 2008-ъгълник е записано числото -1 , а в останалите върхове е записано числото 1 . Един връх се нарича “добър”, ако при последователно обхождане от този връх на върховете на многоъгълника (в коя да е от двете посоки) всички частични суми са положителни. Да се намери най-голямото число k , за което при произволно записване на -1 и 1 има “добър” връх.

Задача 2. Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена чрез следните равенства: $a_1 = 0$, $a_p = 1$ ако p е просто число и $a_{mn} = na_m + ma_n$ за произволни естествени числа m и n . Да се намери най-малкото число n , за което числото $\frac{a_{n^2}}{2008}$ е точна степен на 2 .

Задача 3. Даден е ромб $ABCD$. Да се намерят всички точки X и Y в равнината, за които сумата $AX \cdot AY + BX \cdot BY + CX \cdot CY + DX \cdot DY$ е най-малка.

Задача 4. Нека $a \geq 2$ и $m \geq 2$ са взаимнопрости естествени числа и k е показателят на a по модул m . Да се докаже, че ако нечетното естественото число t е такова, че всеки негов прост делител дели m , но не дели $\frac{a^k - 1}{m}$, то показателят на a по модул mt е равен на kt .

Второ контролно
за определяне на национален отбор за участие в БОМ2008
и отбор за участие във Всерусийска олимпиада
ИМИ-БАН, София, 01.04.2008 г.

Задача 5. Да се намерят всички естествени числа $x, y > 1$, за които числото $x + y^3$ дели $x^8 - 1$ и е точна степен на 2.

Задача 6. В остроъгълен триъгълник ABC са построени височините AA_1 , BB_1 и CC_1 . През точките A_1 , B_1 и C_1 са спуснати перпендикуляри съответно към страните AB и AC ; BA и BC ; CA и CB . Да се докаже, че петите на тези шест перпендикуляра лежат на една окръжност.

Задача 7. Да се намери най-голямото реално число c така, че $n\{n\sqrt{14}\} > c$ за всяко естествено число n ($\{x\}$ означава дробната част на числото x).

Задача 8. Да се намерят всички непразни множества A от реални числа със следните свойства:

- (1) ако $a, b \in A$, то $a - b \in A$;
- (2) ако $a_1, a_2, \dots \in A$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, то $a \in A$.