

Първа част. Избираеми отговори

Задача 1. Дробта

$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$$

е равна на:

- А) $\frac{1}{2}$; Б) $\frac{1}{3}$; В) $\frac{2}{3}$; Г) $\frac{3}{4}$.

Задача 2. Сумата на три числа е 98. Отношението на първото към второто е $\frac{2}{3}$, а отношението на второто към третото число е $\frac{5}{8}$. Второто число е равно на:

- А) 15; Б) 30; В) 20; Г) 48.

Задача 3. Сумата от реципрочните стойности на корените на уравнението

$$x^2 + px + q = 0, \quad q \neq 0$$

е равна на:

- А) $\frac{p}{q}$; Б) $\frac{q}{p}$; В) $-\frac{p}{q}$; Г) $-\frac{q}{p}$.

Задача 4. Броят на решенията на уравнението

$$1 + \sqrt{x-3} = \sqrt{4-2x}$$

е равен на:

- А) 3; Б) 2; В) 1; Г) 0.

Задача 5. Решенията на уравнението

$$4^{2x-1} - 5 \cdot 4^{x-1} + 1 = 0$$

са:

- А) 0; Б) 1; В) 0 и 1; Г) 2.

Задача 6. Решенията на неравенството

$$x^4 + x^2 - 20 \leq 0$$

са:

- А) $(0, 2]$; Б) $[-2, 2]$; В) $(-2, 0]$; Г) $[-1, 1]$.

Задача 7. Решенията на неравенството

$$\frac{2}{x} \leq \frac{1}{x+3}$$

са:

- А) $(-\infty, -6] \cup (-3, 0]$; Б) $(-\infty, 6]$; В) $(-3, 0]$; Г) $[-2, -1]$.

Задача 8. Решенията на неравенството

$$\log_{\frac{1}{4}} x^2 \geq 1$$

са:

- А) $[-\frac{1}{2}, 0]$; Б) $[-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}]$; В) $[0, \frac{1}{2}]$; Г) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Задача 9. Радиусът на описаната окръжност около равнобедрен триъгълник с основа 10 и бедро 13 е равен на:

- А) 7; Б) $\frac{85}{12}$; В) $\frac{169}{24}$; Г) $\frac{5}{3}$.

Задача 10. В правоъгълния триъгълник ABC ъглополовящата CL на правия ъгъл дели хипотенузата на отсечки $AL = 1$ и $BL = 2$. Лицето на триъгълника ABC е равно на:

- А) $\frac{9}{4}$; Б) $\frac{5}{2}$; В) 3; Г) $\frac{9}{5}$.

Втора част. Свободни отговори

Задача 11. Дадена е аритметична прогресия с членове: $a_1 = 2x - 3$, $a_2 = 5x - 11$, $a_3 = 3x + 1$ и $a_n = 2009$. Пресметнете номера n .

Задача 12. Намерете решенията на уравнението $3 \sin x - \cos 2x = 1$, които принадлежат на затворения интервал $[0, \pi]$.

Задача 13. Намерете екстремумите на функцията $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$.

Задача 14. През пресечната точка O на диагоналите на правоъгълника $ABCD$ със страни $AB = 8$ и $BC = 6$ е прекарана права, перпендикулярна на диагонала AC , която пресича страната AB в точка M . Пресметнете лицето на триъгълник AOM .

Трета част. Задача с пълно решение

Задача 15. Даден е триъгълник ABC с ъгъл $\angle ACB = 60^\circ$ и ъглополовяща на същия ъгъл, равна на $\sqrt{3}$. Ако $BC = x$, да се покаже, че $AC = \frac{x}{x-1}$, $x > 1$. Да се пресметне най-малката стойност на лицето на триъгълника.

Отговори

1. А, 2. Б, 3. В, 4. Г, 5. В, 6. Б, 7. А, 8. Б, 9. В, 10. Г, 11. 502, 12. $\pi/6, 5\pi/6$, 13. $f_{\max}(2) = 0$, $f_{\min}(4) = -4$, 14. $\frac{75}{8}$ ед², 15. $S_{\min} = \sqrt{3}$.

Задача 1.

$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$$

Задача 2.

$$\left| \begin{array}{l} x + y + z = 98 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \\ \frac{y}{z} = \frac{5}{8} \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x + y + z = 98 \\ x = \frac{2y}{3} \\ z = \frac{8y}{5} \end{array} \right|$$

След заместване на x и z в първото уравнение на системата, се получава уравнение за y :

$$\frac{2y}{3} + y + \frac{8y}{5} = 98 \Leftrightarrow 10y + 15y + 24y = 98 \cdot 15 \Leftrightarrow 49y = 98 \cdot 15 \Leftrightarrow y = 30.$$

Задача 3. От формулите на Виет за уравнението $x^2 + px + q = 0 \Rightarrow$

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q.$$

Сумата от реципрочните стойности на корените е

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{p}{q}.$$

Задача 4. $1 + \sqrt{x-3} = \sqrt{4-2x}$

Допустими стойности на променливата са решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} x - 3 \geq 0 \\ 4 - 2x \geq 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq 2 \end{array} \right| \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Задача 5.

$$4^{2x-1} - 5 \cdot 4^{x-1} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{4^{2x}}{4} - \frac{5 \cdot 4^x}{4} + 1 = 0 \Leftrightarrow (4^x)^2 - 5 \cdot 4^x + 4 = 0$$

След полагане $4^x = y$, $y > 0$, се получава квадратно уравнение $y^2 - 5y + 4 = 0$ с корени $y_1 = 1 > 0$, $y_2 = 4 > 0$. От полагането $4^x = 4^0$ или $4^x = 4^1$ се получава $x_1 = 0$ или $x_2 = 1$.

Задача 6. $x^4 + x^2 - 20 \leq 0$.

Лявата страна на неравенството е биквадратен тричлен.

Полага се $x^2 = y$, $y \geq 0$. Получава се квадратно неравенство $y^2 + y - 20 \leq 0$. Корените на квадратния тричлен $y^2 + y - 20$ са 4 и (-5) , откъдето се получава неравенството

$$(y - 4)(y + 5) \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 5) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) \leq 0,$$

тъй като $x^2 + 5 > 0$ за всяко x . Решения на неравенството $(x - 2)(x + 2) \leq 0$ са $x \in [-2, 2]$.

Задача 7. ДС: $x \neq 0, x \neq -3$.

$$\frac{2}{x} - \frac{1}{x+3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+6}{x(x+3)} \leq 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x(x+6)(x+3) \leq 0 \\ x \neq 0, x \neq -3 \end{array} \right| \Leftrightarrow x \in (-\infty, -6] \cup (-3, 0).$$

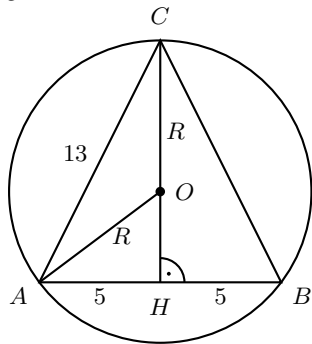
Задача 8. ДС: $x^2 > 0$ - вярно за всяко $x \neq 0$. Тъй като $a = \frac{1}{4} \in (0, 1)$

$$\log_{\frac{1}{4}} x^2 \geq \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Неравенството

$$x^2 - \frac{1}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{D}\mathbb{C} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

Задача 9.



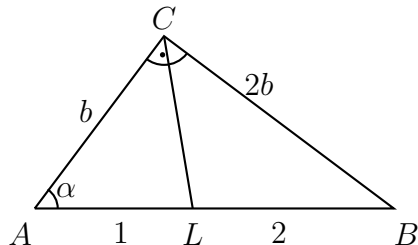
$$\triangle AHC \Rightarrow CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = 12.$$

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{13 \cdot 13 \cdot 10}{4R},$$

$$S = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60.$$

$$\Rightarrow \frac{169 \cdot 5}{2R} = 60 \Leftrightarrow R = \frac{169}{24}.$$

Задача 10.



Нека $AC = b$,

$$\frac{AL}{LB} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow BC = 2b.$$

От правоъгълния $\triangle ABC$ по Питагорова Теорема

$$b^2 + (2b)^2 = 9 \Leftrightarrow b^2 = \frac{9}{5} \Rightarrow S = \frac{b \cdot 2b}{2} = b^2 = \frac{9}{5}.$$

Задача 11. Нека членовете на аритметичната прогресия са

$$a_1 = 2x - 3, a_2 = 5x - 11, a_3 = 3x + 1, \dots, 2009.$$

От свойствата на аритметичната прогресия

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Leftrightarrow 5x - 11 = \frac{(2x - 3) + (3x + 1)}{2} \Leftrightarrow x = 4,$$

откъдето следва, че $a_1 = 5$, $d = a_2 - a_1 = (5x - 11) - (2x - 3) = 3x - 8 = 4$.

От формулата за общия член на аритметична прогресия:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Leftrightarrow 2009 = 5 + (n - 1) \cdot 4 \Leftrightarrow n = 502.$$

Задача 12. Търсят се решенията на $3 \sin x - \cos 2x = 1$ за $x \in [0, \pi]$.

От формулата $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ след заместване в уравнението се получава

$$3 \sin x - (1 - 2 \sin^2 x) = 1 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0.$$

Полага се $\sin x = t$, с допустими стойности за новата променлива $t \in [-1, 1]$. Но тъй като по условие $x \in [0, \pi]$, то $\sin x > 0$, т.е. $\mathbb{D}\mathbb{C}$: $t \in [0, 1]$.

Корените на полученото квадратно уравнение $2t^2 + 3t - 2 = 0$ са

$$t_1 = \frac{1}{2} \in \mathbb{D}\mathbb{C} \quad , \quad t_2 = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{D}\mathbb{C}.$$

От полагането $\sin x = \frac{1}{2}$ се получават решения

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, \dots,$$

от които в интервала $[0, \pi]$ са $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{5\pi}{6}$.

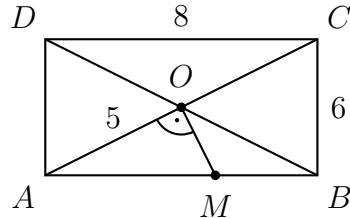
Задача 13. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$, $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$.

Решава се уравнението $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$, решенията на което са стационарни точки $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$. Втората производна е $f''(x) = 6x - 18$. Заместват се стационарните точки във втората производна:

$$f''(2) = 12 - 18 = -6 < 0 \Rightarrow \max, \quad f''(4) = 24 - 18 = 6 > 0 \Rightarrow \min.$$

$$f_{\max}(2) = 0, \quad f_{\min}(4) = -4.$$

Задача 14.



По Теоремата на Питагор

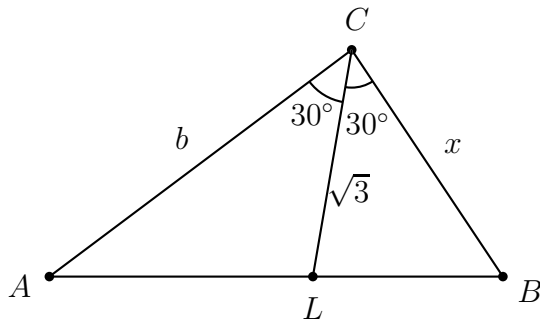
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10,$$

$$AO = \frac{1}{2}AC = 5.$$

$$\triangle AOM \sim \triangle ABC \quad (\angle A - \text{общ}, \angle 90^\circ) \Rightarrow \frac{AO}{AB} = \frac{OM}{BC} \Leftrightarrow \frac{5}{8} = \frac{OM}{6} \Leftrightarrow OM = \frac{15}{4}.$$

$$S_{\triangle AMO} = \frac{AO \cdot OM}{2} = \frac{5 \cdot \frac{15}{4}}{2} = \frac{75}{8} \text{ ед}^2.$$

Задача 15.



Дадено: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 60^\circ$,
 $CL = \sqrt{3}$ - ъглополовяща.

Да се докаже: а).

$$CA = \frac{x}{x-1}, \quad x > 1;$$

б). $S_{\min} = ?$

Решение: а). Нека $AC = b$, $CB = x$.

$$S_{\triangle ALC} + S_{\triangle BLC} = S_{\triangle ABC} \Leftrightarrow \frac{b \cdot \sqrt{3} \sin 30^\circ}{2} + \frac{x \cdot \sqrt{3} \sin 30^\circ}{2} = \frac{b \cdot x \sin 60^\circ}{2}$$

$$\frac{b\sqrt{3}}{4} + \frac{x\sqrt{3}}{4} = \frac{bx\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow b + x = bx \Leftrightarrow b(x-1) = x \Leftrightarrow b = \frac{x}{x-1}$$

б).

$$S_{\triangle ABC} = S(x) = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x^2}{x-1}, \quad x > 1.$$

$$S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Първата производна се анулира за две стойности на x : $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. От тях само $x_2 = 2$ удовлетворява условието $x > 1$. Следователно

$$S_{\min} = S(2) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2^2}{2-1} = \sqrt{3}$$