

Да се изрази чрез p, q симетричната функция F от корените x_1, x_2, x_3 на полинома $f = x^3 + px + q$, където $F = \frac{1}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{1}{(x_2 - x_3)^2} + \frac{1}{(x_3 - x_1)^2}$

Решение:

$$f = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 & (1) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p & (2) \\ x_1x_2x_3 = -q & (3) \end{cases}$$

От (1) изразяваме: $x_1 = -x_2 - x_3$; $x_2 = -x_1 - x_3$; $x_3 = -x_2 - x_1$

Заместваме в (2):

$$(-x_2 - x_3)x_2 + x_2x_3 + (-x_2 - x_3)x_3 = p \Rightarrow x_2^2 + x_3^2 = -p - x_2x_3$$

$$(-x_3 - x_1)x_3 + x_3x_1 + (-x_3 - x_1)x_1 = p \Rightarrow x_3^2 + x_1^2 = -p - x_3x_1$$

$$(-x_1 - x_2)x_1 + x_1x_2 + (-x_1 - x_2)x_2 = p \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = -p - x_1x_2$$

$$\text{Тогава } F = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2} + \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2} + \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2}$$

$$F = \frac{1}{-p - 3x_1x_2} + \frac{1}{-p - 3x_2x_3} + \frac{1}{-p - 3x_3x_1} =$$

$$F = - \left(\frac{1}{p + 3x_1x_2} + \frac{1}{p + 3x_2x_3} + \frac{1}{p + 3x_3x_1} \right)$$

$$F = - \frac{(p + 3x_2x_3)(p + 3x_3x_1) + (p + 3x_3x_1)(p + 3x_1x_2) + (p + 3x_1x_2)(p + 3x_2x_3)}{(p + 3x_1x_2)(p + 3x_2x_3)(p + 3x_3x_1)}$$

$$F = - \frac{p^2 + 3p(x_1x_3 + x_2x_3) + 9x_1x_2x_3^2 + \dots}{p^3 + 3p^2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + 9px_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) + 27x_1^2x_2^2x_3^2}$$

Заместваме:

$$F = - \frac{3p^2 + 6p^2}{p^3 + 3p^3 + 27q^2}$$

$$F = - \frac{9p^2}{4p^3 + 27q^2}$$