1 Една задача от Симплекс-метод

Пример 1 *Да се реши чрез симплекс-метод следната задача на Линейно оптимиране:*

$$\begin{array}{rclllll} min\ Z & = & 4x_1 & +5x_2 & -2x_3 & \\ & & 3x_1 & +4x_2 & -2x_3 & \geq 7 \\ & & 4x_1 & +3x_2 & +x_3 & \leq 12 \\ & & & x_i \geq 0, & i=1,2,3. & \end{array}$$

Решение:

1. Подготвителен етап

Задачата е за минимум. Преобразува се в задача за максимум:

$$\min Z = \max(-Z) = \max G = \max\{-4x_1 - 5x_2 + 2x_3\}.$$

Въвеждат се три допълнителни променливи $x_4, \overline{x}_5, x_6 \geq 0$, които се добавят в левите страни на ограниченията, за да се получат ограничения-равенства.

2. *Еквивалентна форма*

$$\begin{array}{lcllllllll} (0) & G & +4x_1 & +5x_2 & -2x_3 & & +M\overline{x}_5 & & =0 \\ (1) & & 3x_1 & +4x_2 & -2x_3 & -x_4 & +\overline{x}_5 & & =7 \\ (2) & & 4x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & +x_6 & =12 \end{array}$$

3. Канонична форма

$$\begin{array}{lcllllllll} (0) & G+ & (4-3M)x_1 & +(5-4M)x_2 & +(2M-2)x_3 & +Mx_4 & & & =-7M \\ (1) & & 3x_1 & +4x_2 & -2x_3 & -x_4 & +\overline{x}_5 & & =7 \\ (2) & & 4x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & +x_6 & =12 \end{array}$$

4. Табличен запис

Резултатите от прилагането на *симплекс-метода* са дадени в Табл. 1. В началната *симплекс-таблица* се записват коефициентите пред неизвестните от каноничната форма на задачата. Определя се базисното решение за Итер.(0), като се спазва правилото: базисните променливи имат стойност, равна на свободния коефициент в същото уравнение, а небазисните променливи - стойност 0.

Следователно, базисното решение за Итер.(0) е: $(0, 0, 0, 0, 7, 12)$, $Z = -7M$. Проверява се *Теста за оптималност*. Тъй като в (0)-ия ред има два отрицателни коефициента, следва, че това базисно решение не е оптимално. Преминава се на *Итеративна стъпка*.

Определя се максималният по модул отрицателен коефициент в (0) ред: $5 - 4M$. Стълбът, съответстващ на променливата x_2 е ключов стълб. Определя се минималното отношение на свободен коефициент към положителен коефициент в ключовия стълб: $min(7/4, 12/3) = 7/4$, следователно ключов ред е редът 1.

Ключовият ред се разделя на ключовия елемент 4 и полученият нов ред (1) се записва в нова симплекс-таблица: Итер.(1).

Итер.	БП	$No.$	G	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{x}_5$	x_6	b_i
0	G	0	1	$4-3M$	$5-4M$	$2M-2$	M	0	0	$-7M$
	$\overline{x}_5$	1	0	3	$\boxed{4}$	-2	-1	1	0	7
	x_6	2	0	4	3	1	0	0	1	12
1	G	0	1	$1/4$	0	$1/2$	$5/4$	$M-5/4$	0	$-35/4$
	x_2	1	0	$3/4$	1	$-1/2$	$-1/4$	$1/4$	0	$7/4$
	x_6	2	0	$7/4$	0	$-1/2$	$3/4$	$-3/4$	1	$27/4$

Таблица 1: Симплекс-таблици на решението за Пример 1

Новият ред (1) се умножава с $5-4M$ и се прибавя към ред (0); така се получава нов ред (0), който се записва в новата симплекс-таблица. След това, аналогично, новият ред (1) се умножава с (-3) и се прибавя към ред (2); получава се нов ред (2).

Така, след тези елементарни операции над редовете, се получава нова таблица, в която на x_2 съответства единичен стълб, т.е. x_2 е базисна променлива, а $\overline{x}_5$ напуска базиса; съответстващият ѝ стълб вече не е единичен.

На новата *симплекс-таблица* съответства ново базисно решение $(0, \frac{7}{4}, 0, 0, 0, \frac{27}{4})$, което е оптимално, защото в ред (0) няма отрицателен коефициент пред променливите.

След една итерация на симплекс-метода се получи оптималното решение на задачата

$$G_{max}\left(0, \frac{7}{4}, 0, 0, 0, \frac{27}{4}\right) = -\frac{35}{4},$$

при което стойността на дадената целева функция е

$$Z_{min}\left(0, \frac{7}{4}, 0\right) = \frac{35}{4}.$$