

53. Национална олимпиада по математика Национален кръг, София, 15–16 май 2004 г.

Задача 1. Нека I е центърът на вписаната в триъгълник ABC окръжност и A_1, B_1, C_1 са точки съответно върху отсечките AI, BI и CI . Симетралите на отсечките AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в точки A_2, B_2 и C_2 . Да се докаже, че центърът на описаната около триъгълник $A_2B_2C_2$ окръжност съвпада с центъра на описаната около триъгълник ABC окръжност тогава и само тогава, когато I е ортоцентър на триъгълник $A_1B_1C_1$.

Олег Мушкаров, Николай Николов

Задача 2. За всяко естествено число n сумата $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ е представена като несъкратима дроб $\frac{p_n}{q_n}$.

- Да се докаже, че 3 не дели p_{67} .
- Да се намерят всички n , за които 3 дели p_n .

Николай Николов

Задача 3. Туристическа група се състои от n човека. Измежду всеки трима има двама, които не се познават. Известно е, че групата не може да бъде разпределена в два автобуса така, че всеки да пътува само с непознати. Да се докаже, че в групата има турист с не повече от $\frac{2}{5}n$ познати.

Иван Ланджеев

Задача 4. Във всяка дума, съставена от буквите a и b , можем да извършваме следните замени: $aba \rightarrow b, b \rightarrow aba, bba \rightarrow a, a \rightarrow bba$. Възможно ли е от думата $b \underbrace{aa \dots a}_{2003}$ да се получи думата $\underbrace{aa \dots a}_{2003} b$?

Емил Колев

Задача 5. Нека a, b, c и d са естествени числа такива, че броят на наредените двойки от числа $(x, y), x, y \in (0, 1)$, за които $ax + by$ и $cx + dy$ са едновременно цели числа, е 2004. Ако $\text{НОД}(a, c) = 6$, да се намери $\text{НОД}(b, d)$.

Олег Мушкаров, Николай Николов

Задача 6. Нека p е просто число. За произволни цели числа $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_m < p$ и $0 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_n < p$ да означим с k броят на различните остатъци при деление на p на числата $a_i + b_j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Да се докаже, че:

- ако $m + n > p$, то $k = p$; б) ако $m + n \leq p$, то $k \geq m + n - 1$.

Владимир Барзов, Александър Иванов