

Инверсия

Деф 1. Нека е дадена окръжност k с център O и радиус r . На произволна точка M съпоставяме точката M^* такава, че M^* лежи на лъча OM и $OM \cdot OM^* = r^2$.

От дефиницията е ясно, че ако M е точка от k , тя остава на място, ако е вън от окръжността k се изобразява в точка в окръжността, а ако M е в k – в точка вън от нея.

Приемаме, че O се изобразява в т. нар. безкрайна точка.

Ясно е, че права, минаваща през центъра на окръжността се изобразява в себе си и че композицията на две инверсии относно една и съща окръжност е идентитет.

Построяване на образа на дадена точка при инверсия. Нека е дадена окръжност с център O и радиус r . Ако M е извън окръжността, построяваме допирателните MA и MB към k . M^* е пресечната точка на AB с OM . Наистина тр. OAM е правоъгълен и $OA^2 = OM^* \cdot OM$. По обратния начин постъпваме ако M е вътрешна за k .

Теорема. Ако при $I(O, r)$: $I(A)=A_1$, $I(B)=B_1$ то тр. OAB и OA_1B_1 са подобни, а правите AB и A_1B_1 – антипаралелни. (От $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = r^2 \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OB_1}{OA_1}$ и двата триъгълника има общ ъгъл.)

Теорема. Ако правата l не минава през O , то образът и окръжност през O .

Д-во: Нека A е е петата на перпендикуляра от O към l , а X е произволна точка от правата. Триъгълникът OAX е правоъгълен, такъв е и OA_1X_1 , което значи, че OA_1 е диаметър на окръжност, на която лежи X_1 .

Ясно е и обратното, ако окръжност минава през O , то образът и е права, която не минава през O .

Теорема: Образът на окръжност k_1 , която не минава през O е окръжност.

Д-во: Нека S е центърът на k_1 , а A и B са пресечните и точки с OS . Нека $I(A)=A_1$, $I(B)=B_1$, а C е произволна точка от k_1 . Ако $I(C)=C_1$, правите AC и A_1C_1 , както и BC и B_1C_1 са антипаралелни и значи AC, BC и A_1C_1, B_1C_1 сключват равни ъгли. Тогава $\angle A_1C_1B_1 = \angle ACB = 90^\circ$, или A_1C_1 е диаметър на окръжност k_2 , на която лежат образите на всички точки от k_1 . Да отбележим, че центърът на k_1 , **не се изобразява** в центъра на k_2 .

Да обобщим:

	Минава през O	Не минава през O
Прав	Прав	Окръжност през O
Окръжност	Прав, която не минава през O	Окръжност, която не минава през O

Понеже инверсията е взаимно еднозначно съответствие ($I(O) = \infty$), ако две криви имат единствена пресечна точка, то и образите им имат само една прес. точка (или са успоредни, ако кривите се пресичат в т. O).