Т Е М А   З А   8   К Л А С

Задача 1. Да се реши системата:

$$\begin{cases} |x|+|y| = 1 \\ |x-2a| = |y-3| \end{cases}$$

в зависимост от реалния параметър a.

Решение: От второто уравнение имаме: $x-2a=y-3$ или $-x+2a=y-3$. В първия случай $y=x-2a+3$ и първото уравнение добива вида $|x|+|x-2a+3|=1$.

Ако $x\geq 0$ и $x\geq 2a-3$, имаме $2x-2a+3=1$, откъдето $x=a-1$. Получената стойност е решение при $a\geq 1$ и $a-1\geq 2a-3$, т.е. ако a се намира в интервала [1;2]. Сега $y = a-1-2a+3 = 2-a$.

Ако $x\geq 0$ и $x<2a-3$, имаме $0x+2a-3=1$, откъдето $0x=2a-4$, което има решения само при $a=2$ и тогава x може да е всяко число в интервала [0;1). Съответно $y=x-1$.

Ако $x<0$ и $x\geq 2a-3$, имаме $0x-2a+3=1$, откъдето $0x=2a-2$, което има решения само при $a=1$ и тогава x може да е всяко число в интервала [–1;0). Съответно $y=x+1$.

Ако $x<0$ и $x<2a-3$, имаме $2x-2a+3=-1$, откъдето $x=a-2$. Получената стойност е решение при $a<2$ и $a-2<2a-3$, т.е. ако a се намира в интервала (1;2). Сега $y=a-2-2a+3=1-a$.

Във втория случай $y=-x+2a+3$ и първото уравнение от системата добива вида $|x|+|x-2a-3|=1$.

Ако $x\geq 0$ и $x\geq 2a+3$, имаме $2x-2a-3=1$, откъдето $x=a+2$. Получената стойност е решение при $a\geq -2$ и $a+2\geq 2a+3$, т.е. ако a се намира в интервала [–2;–1]. Съответно $y=-a-2+2a+3=a+1$.

Ако $x\geq 0$ и $x<2a+3$, имаме $0x+2a+3=1$, откъдето $0x=2a+2$, което има решения само при $a=-1$ и тогава x може да е всяко число в интервала [0;1). Съответно $y=1-x$.

Ако $x<0$ и $x\geq 2a+3$, имаме $0x-2a-3=1$, откъдето $0x=2a+4$, което има решения само при $a=-2$ и тогава x може да е всяко число в интервала [–1;0). Съответно $y=-x-1$.

Ако $x<0$ и $x<2a+3$, имаме $2x-2a-3=-1$, откъдето $x=a+1$. Получената стойност е решение при $a<-1$ и $a+1<2a+3$, т.е. ако a се намира в интервала (–2;–1). Сега $y=-a-1+2a+3=a+2$.

Като подредим според стойностите на параметъра a, получаваме следното:

Ако $a=-2$, то x може да е всяко число в интервала [–1;0] и $y=-x-1$.

Ако $-2 < a < -1$, то $(x; y) = (a+2; a+1)$ или $(x; y) = (a+1; a+2)$.

Ако $a = -1$, то x може да е всяко число в интервала $[0;1]$ и $y = 1 - x$.

Ако $a = 1$, то x може да е всяко число в интервала $[-1;0]$ и $y = x + 1$.

Ако $1 < a < 2$, то $(x; y) = (a-1; 2-a)$ или $(x; y) = (a-2; 1-a)$.

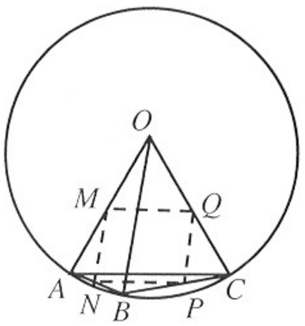
Ако $a = 2$, то x може да е всяко число в интервала $[0;1]$ и $y = x - 1$.

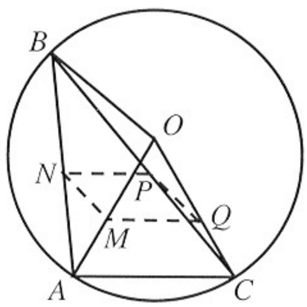
В останалите случаи системата няма решение.

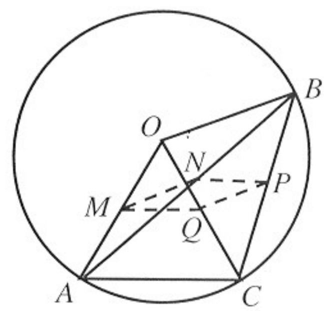
Задачата може да се реши и графично, като се съобрази, че множеството от точките в координатната система, които изпълняват първото уравнение, е квадрат с върхове (1;0), (0;1), (–1;0) и (0;–1), а множеството от точките, които изпълняват второто – две прави с ъглови коефициенти 1 и –1, минаващи през точката ($2a$;3).

Задача 2. Върху окръжност с център O са избрани точки A, B и C така, че мярката на дъгата $\overset{\frown}{BC}$ е два пъти по-голяма от мярката на дъгата $\overset{\frown}{AB}$. Средите на отсечките OA, AB, BC и CO са съответно M, N, P и Q. Ако правите MP и NQ са перпендикулярни, да се намери мярката на $\angle ACB$.

Решение:







MN е средна отсечка в ΔAOB, а PQ е средна отсечка в ΔBCO. Следователно те са равни на половината от отсечката OB. Аналогично MQ и NP са равни на половината от отсечката AC. Така четириъгълникът $MQPN$ е успоредник и понеже диагоналите му са перпендикулярни по условие, то той е ромб. Оттук следва, че AC е равна на радиуса OB на окръжността и значи ΔACO е равностранен. Заключаваме, че малката дъга $\overset{\frown}{AC}$ е равна на 60^0. Възможни са няколко случая:

<u>Случай 1.</u> Точката B е върху малката дъга $\overset{\frown}{AC}$ (вж. първия чертеж). Да означим $\overset{\frown}{AB} = x^0 < 180^0$. Тогава $\overset{\frown}{BC} = 2x^0$ и $x^0 + 2x^0 = 60^0$, откъдето $x^0 = 20^0$ и $\angle ACB = 10^0$.

<u>Случай 2.</u> Точката B е върху голямата дъга $\overset{\frown}{AC}$ (вж. втория и третия чертеж). Сега, ако отново $\overset{\frown}{AB} = x^0 < 180^0$, то са възможни два подслучая:

1. точката A е върху малката дъга $\overset{\frown}{BC}$; условието на задачата може да се реализира, когато голямата дъга $\overset{\frown}{BC}$ е два пъти по-голяма от малката дъга $\overset{\frown}{AB}$ (вж. втория чертеж); тогава $2x^0 = 360^0 - x^0 - 60^0$, откъдето $x^0 = 100^0$ и $\angle ACB = 50^0$;
2. точката A е върху голямата дъга $\overset{\frown}{BC}$ (вж. третия чертеж); единствената възможност е когато голямата дъга $\overset{\frown}{BC}$ е два пъти по-голяма от малката дъга $\overset{\frown}{AB}$; тогава $2x^0 = 360^0 - x^0 + 60^0$, откъдето $x^0 = 140^0$ и $\angle ACB = \dfrac{360^0 - 140^0}{2} = 110^0$.

Да отбележим, че някои от комбинациите "малка-голяма дъга" не могат да се реализират поради ограниченията в условието на задачата.

Задача 3. Да се докаже, че ако положителните числа a, b, c, x, y и z изпълняват условията $a+b+c=x+y+z=1$, то

а) $\dfrac{a^2}{a+x}+\dfrac{b^2}{b+y}+\dfrac{c^2}{c+z}=\dfrac{x^2}{a+x}+\dfrac{y^2}{b+y}+\dfrac{z^2}{c+z}$;

б) $\dfrac{a^2}{a+x}+\dfrac{b^2}{b+y}+\dfrac{c^2}{c+z}\ge\dfrac{1}{2}$. Кога се достига равенство?

Решение: а)

$$\frac{a^2}{a+x}+\frac{b^2}{b+y}+\frac{c^2}{c+z}-\left(\frac{x^2}{a+x}+\frac{y^2}{b+y}+\frac{z^2}{c+z}\right)=\frac{a^2-x^2}{a+x}+\frac{b^2-y^2}{b+y}+\frac{c^2-z^2}{c+z}=$$

$$=(a-x)+(b-y)+(c-z)=(a+b+c)-(x+y+z)=1-1=0.$$

б) От а) следва, че $\dfrac{a^2}{a+x}+\dfrac{b^2}{b+y}+\dfrac{c^2}{c+z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2+x^2}{a+x}+\dfrac{b^2+y^2}{b+y}+\dfrac{c^2+z^2}{c+z}\right)$ и

като използваме, че $m^2+n^2\ge\dfrac{1}{2}(m+n)^2$, получаваме:

$$\frac{a^2}{a+x}+\frac{b^2}{b+y}+\frac{c^2}{c+z}\ge\frac{1}{4}\left(\frac{(a+x)^2}{a+x}+\frac{(b+y)^2}{b+y}+\frac{(c+z)^2}{c+z}\right)=\frac{1}{4}(a+x+b+y+c+z)=\frac{1}{4}.2=\frac{1}{2}.$$

Тъй като в $m^2+n^2\ge\dfrac{1}{2}(m+n)^2$ равенство се достига при $m=n$, то равенство в даденото неравенство се достига при $a=x$, $b=y$ и $c=z$.

Забележка. Неравенството е директно следствие от "хубавото неравенство":

$$\frac{a^2}{a+x}+\frac{b^2}{b+y}+\frac{c^2}{c+z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a+x+b+y+c+z}=\frac{1}{2}.$$

Тук равенство се достига само ако $\dfrac{a}{a+x}=\dfrac{b}{b+y}=\dfrac{c}{c+z}$, което еквивалентно с $a=x$, $b=y$ и $c=z$.

<u>Критерии за оценяване:</u>

Задача 1. Общо 7 т., от които: по 1 т. за правилно разглеждане на всеки от 6-те случая: $a=-2$; $-2<a<-1$; $a=-1$; $a=1$; $1<a<2$ и $a=2$. Седмата точка е за случаите, в които системата няма решение. При частично решение: по 1 т. за правилно разкриване на модула на всяко от уравненията. При решение без проверка дали решението принадлежи на дадения случай да се присъждат 30% от точките за този случай.

Задача 2. Общо 7 т., от които: 1 т. за откриване на поне две от средните отсечки; 1 т. за факта, че четириъгълникът $MQPN$ е ромб; 1 т. за факта, че ΔACO е равностранен; 3 т. за един от трите възможни случая за разположение на точките и общо 1 т. за останалите (точката се присъжда и за разглеждане на само един от останалите два случая).

Задача 3. Общо 7 т., от които: 2 т. за а) и 5 т. за б). В б) 1 т. за равенството $\dfrac{a^2}{a+x}+\dfrac{b^2}{b+y}+\dfrac{c^2}{c+z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2+x^2}{a+x}+\dfrac{b^2+y^2}{b+y}+\dfrac{c^2+z^2}{c+z}\right)$, 1 т. за неравенството

$m^2+n^2 \geq \frac{1}{2}(m+n)^2$, 2 т. за завършване на задачата и 1 т. за случая на равенство, но при отговор, че равенство се достига само ако всички числа са равни на $\frac{1}{3}$, точката не се присъжда. Прилагането на “хубавото неравенство” (еквивалентно, Коши-Шварц) без доказателство е допустимо.

Забележка. Посочените критерии са примерни и съответстват на предложените от Националната комисия решения. При наличие на алтернативни решения всяка Областна комисия изготвя свои критерии за оценяването им, като се съобразява с предложените.