Лекция 6

§6. Криволинейни интеграли от първи и втори род

1. Криволинеен интеграл от първи род. Нека $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, е гладка крива с начална точка $A = \mathbf{r}(\alpha)$ и крайна точка $B = \mathbf{r}(\beta)$ (Рис. 6.1).

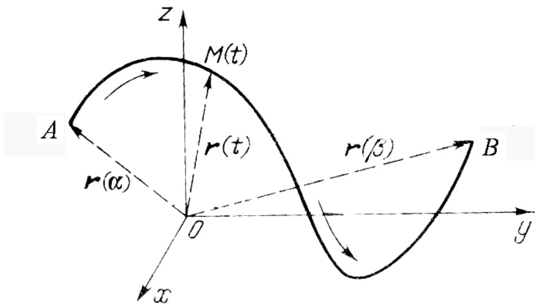

Рис. 6.1.

Тогава дължината на участъка от кривата от началната точка A до точката $M = \mathbf{r}(t)$ се дава от формулата

(6.1) $$s = s(t) = \int_{\alpha}^{t} |\dot{\mathbf{r}}(\theta)| d\theta = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{\dot{x}^2(\theta) + \dot{y}^2(\theta) + \dot{z}^2(\theta)} d\theta,$$

която е строго монотонно растяща функция, понеже $\dot{s} = |\dot{\mathbf{r}}| > 0$ (кривата е гладка), следователно има обратна, $t = t(s)$, чрез която кривата може да се запише $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s)) = \mathbf{r}(s)$, $0 \le s \le l$, където $l = s(\beta)$ е дължината на γ. В този случай казваме, че γ е представена чрез своя ***естествен параметър*** s.

Казано нестрого, ако "разпънем" кривата γ за двата края A и B, то величината s се превръща в променлива на числова ос, която съдържа изправената крива. От тук идва и названието ***ректифицируеми***, т.е. могат да се "изправят", за кривите, които имат дължина.

Определение 6.1. Криволинейният интеграл от първи род от функцията $f(x, y, z)$ върху гладката крива γ се дефинира чрез формулата

(6.2) $$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds = \int_{0}^{l} f(x(s), y(s), z(s)) ds, \; l = \mu(\gamma) = s(\beta),$$

когато съществува интегралът в дясната страна на равенството.

Когато кривата γ е частично гладка, интегралът над γ се определя като сбор от интегралите по съставящите гладки дъги.

Нека $\tau = \{s_k\}_{k=1}^{n}$ е едно интегрално деление на интервала $[0, l]$ и нека $\xi_k \in [s_{k-1}, s_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$. Да означим $A_k = \mathbf{r}(s_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$, ($A_0 = A$, $A_n = B$) $M_k = \mathbf{r}(\xi_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ (Рис. 6.2).

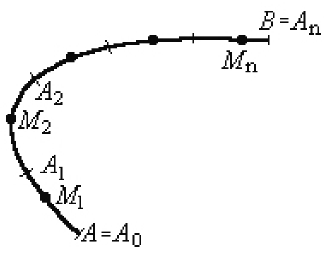

Рис. 6.2.

Тогава римановата интегрална сума за дясната страна от равенството (6.2) има вида

(6.3) $$r(\varphi,\tau)=\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k\ ,$$

където $\Delta s_k = s_k - s_{k-1} = \mu(\gamma_k)$, се явява дължината на участъка γ_k от γ, между точките A_{k-1} и A_k, $k=1,2,\dots,n$. Интегралната сума (6.3) може да се схваща като образувана по следния начин. Извършваме (интегрално) деление на кривата γ на елементарни дъги γ_1, γ_2, ..., γ_n посредством точките на деление $A=A_0$, A_1, A_2, ..., $A_n = B$, след което от всяка дъга γ_k избираме по една точка $M_k \in \gamma_k$, $k=1,2,\dots,n$, и сумираме величините $f(M_k)\mu(\gamma_k)$. По този начин става ясно, че криволинейният интеграл от първи род се определя независимо от начина на параметризация на γ, когато въпросната параметризация представя γ като гладка крива. От това тълкуване следват и някои механични приложения на този интеграл.

Например, ако разглеждаме γ като материална нишка с плътност на разпределение на масата $\rho(x,y,z)$, то масата на нишката се дава по формулата

$$M=\int_{\gamma}\rho ds\ ,$$

а координатите на центъра на тежестта G,

$$G_x=\frac{1}{M}\int_{\gamma}x\rho ds\ ,\ G_y=\frac{1}{M}\int_{\gamma}y\rho ds\ ,\ G_z=\frac{1}{M}\int_{\gamma}z\rho ds\ .$$

От формулата (6.2) следва и начина на пресмятане на интеграла. Нека гладката крива γ е зададена с параметрично уравнение $\gamma:\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, $\alpha\le t\le\beta$. Тогава като направим смяна на променливите $s=s(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, отчитайки връзката (6.1), получаваме формулата

(6.4) $$\int_{\gamma} f(x,y,z)ds=\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt\ .$$

Дотук формално разглеждахме случая на пространствена крива. Криволинеен интеграли от първи род се дефинира за ***равнинна крива*** по напълно аналогичен начин. За да получим съответните определения и свойства е достатъчно в разсъжденията да отстраним изразите, касаещи третата променлива z.

Например да пресметнем интеграла 2

$$I=\int_{\gamma}xyds\ ,$$

където кривата γ е частта от окръжността $x^2+y^2=4$, разположена в първи квадрант (Рис. 6.3).

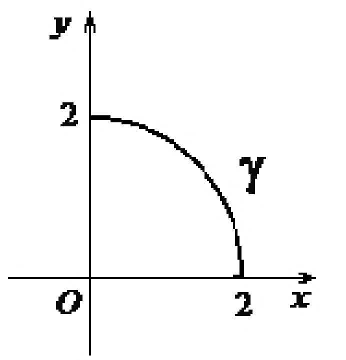

Рис. 6.3.

Тук можем да представим параметрично γ както следва,

$$\gamma : \left| \begin{array}{l} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

По формулата (6.4) пресмятаме

$$I = \int_0^{\pi/2} 4\cos t \sin t \sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t}\,dt = 8\int_0^{\pi/2} \cos t \sin t\,dt = 4 .$$

Криволинейният интеграл от първи род е непосредствено обобщение на определения интеграл на функция на една променлива и притежава всички характерни свойства на интеграла. И тук, когато $f(x, y, z) \equiv 1$, стойността на интеграла е равна на мярката на множеството, над което се интегрира,

$$\int_\gamma ds = \mu(\gamma).$$

Верността на тази формула следва веднага от определенията на интеграла и дължина на крива.

Линейност. Интегралът от линейната комбинация е равен на съответната линейна комбинация от интеграли, ако $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n$, то

$$\int_\gamma f ds = \lambda_1 \int_\gamma f_1 ds + \lambda_2 \int_\gamma f_2 ds + \cdots + \lambda_n \int_\gamma f_n ds .$$

Адитивност. Ако гладката или частично гладката крива $\gamma = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n$ е композиция на такива криви γ_1, γ_2, ..., γ_n, където началото на γ_2 съвпада с края на γ_1, и т.н., то

$$\int_\gamma f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds + \cdots + \int_{\gamma_n} f ds .$$

Позитивност. Ако функцията f е положителна над γ, то

$$\int_\gamma f(x, y, z) ds \ge 0 .$$

Теорема за средните стойности. Нека $f(x, y, z)$ е непрекъсната над γ, а функцията $g(x, y, z)$ не си сменя знака над γ. Тогава

$$\int_\gamma f(x, y, z) g(x, y, z) ds = f(\xi, \eta, \zeta) \int_\gamma g(x, y, z) ds ,$$

за някоя точка $(\xi, \eta, \zeta) \in \gamma$. Когато $g(x, y, z) \equiv 1$, получаваме

$$\int_\gamma f(x, y, z) ds = f(\xi, \eta, \zeta)\mu(\gamma),$$

за някоя точка $(\xi, \eta, \zeta) \in \gamma$.

Оценка на интеграла. Нека за някои константи m, M и C да бъде изпълнено $m \le f(x, y, z) \le M$ и $|f(x, y, z)| \le C$, за всяко $(x, y, z) \in \gamma$. Тогава

$$m\mu(\gamma) \le \int_\gamma f(x, y, z) ds \le M\mu(\gamma) \text{ и } \left| \int_\gamma f(x, y, z) ds \right| \le C\mu(\gamma).$$

2. Криволинеен интеграл от втори род. Нека е дадена гладката крива γ с параметрично уравнение $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, което в разгърнат вид изглежда по следния начин

$$(6.5) \qquad \gamma : \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \\ \alpha \le t \le \beta \end{array} \right.$$

Параметризацията представя не само кривата като съвкупност от точки, а и задава върху нея ***ориентация***, свързана с това как се обхожда кривата при нарастване на параметъра. От формулите (6.5) се подразбира, че началната точка на γ е $A = \mathbf{r}(\alpha)$, а крайната е $B = \mathbf{r}(\beta)$, при което с нарастване на параметъра t от левия край на интервала α до десния край β, текущата точка $M = \mathbf{r}(t)$ обхожда точките на γ, започвайки от A и свършвайки в B. На основа представянето (6.5), ориентацията може да бъде променена в противоположна например по следния начин

$$(6.6) \qquad \gamma^{-1} : \left| \begin{array}{l} x = \varphi(-t) \\ y = \psi(-t) \\ z = \chi(-t) \\ -\beta \le t \le -\alpha \end{array} \right.$$

Началната точка в (6.6) се задава при стойност на параметъра $t = -\beta$, което веднага се вижда, че отговаря на точката B от параметризацията (6.5), а крайната за стойност на параметъра $t = -\alpha$, което веднага се вижда, че отговаря на точката A от параметризацията (6.5). Символът γ^{-1} показва, че става дума за крива, която съвпада с γ като множество от точки но има противоположна на γ ориентация.

Във всяка точка от кривата $M = \mathbf{r}(t)$ може да се определи допирателен вектор

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j} + \dot{z}(t)\mathbf{k} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

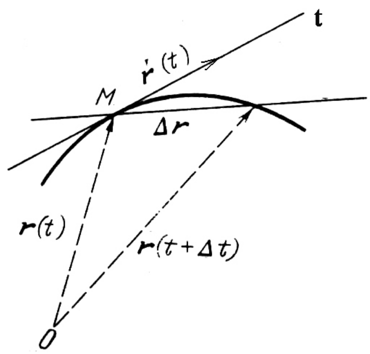

Рис. 6.4.

и ***единичен*** допирателен вектор

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{\dot{x}}{|\dot{\mathbf{r}}|}\mathbf{i} + \frac{\dot{y}}{|\dot{\mathbf{r}}|}\mathbf{j} + \frac{\dot{z}}{|\dot{\mathbf{r}}|}\mathbf{k}\,.$$

Допирателната права в точката $\mathbf{r}_0$ има уравнение $\mathbf{t} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\boldsymbol{\tau}_0$, $t \in \mathbb{R}$.

Когато във всяка точка $M(x, y, z)$ на едно множество E е определен вектор $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, то се казва, че в E е зададено ***векторно поле*** с координати $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ и $R = R(x, y, z)$. Ако върху ориентираната гладка крива γ е зададено векторното поле $\mathbf{F}(P,Q,R)$, то можем да образуваме скаларното произведение (Рис. 6.5)

$$\mathbf{F\tau} = P\frac{\dot{x}}{|\dot{\mathbf{r}}|} + Q\frac{\dot{y}}{|\dot{\mathbf{r}}|} + P\frac{\dot{z}}{|\dot{\mathbf{r}}|}.$$

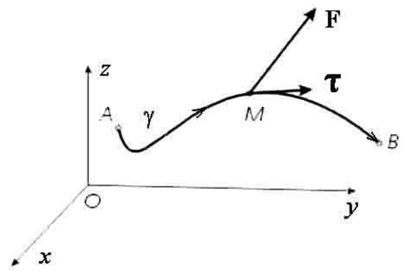

Рис. 6.5.

Определение 6.2. Криволинеен интеграл от втори род от векторното поле $\mathbf{F}$ върху гладката крива γ се нарича криволинейният интеграл от първи род от скаларното произведение $\mathbf{F\tau}$,

(6.7) $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F\tau}ds$.

Когато кривата γ е частично гладка, интегралът над γ се определя като сбор от интегралите по съставящите гладки дъги.

След познатата смяна на променливата $s = s(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, отчитайки, че $|\dot{\mathbf{r}}| = \dot{s}$, интегралът от (6.7) приема вида

(6.8) $$\int_\gamma \mathbf{F\tau}ds = \int_\alpha^\beta [P\dot{x} + Q\dot{y} + R\dot{z}]dt = \int_\alpha^\beta P\dot{x}dt + \int_\alpha^\beta Q\dot{y}dt + \int_\alpha^\beta R\dot{z}dt,$$

което дава основание да запишем криволинейният интеграл от втори род във формата

$$\int_\gamma \mathbf{F\tau}ds = \int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_\gamma \mathbf{F}d\mathbf{r},$$

където $\mathbf{F}d\mathbf{r}$ е скаларното произведение на полето $\mathbf{F} = (P,Q,R)$ с вектора на диференциалите $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$.

Формулата (6.8) предлага начин за пресмятане на интеграла при всяка гладка параметризация на кривата γ. Например да разгледаме интеграла

$$I = \int_\gamma -ydx + xdy + zdz,$$

където γ е винтовата линия

$$\gamma: \left| \begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \\ 0 \le t \le 2\pi \end{array} \right.$$

Съгласно формулата (6.8) пресмятаме

$$I = \int_0^{2\pi} \left[a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2 t\right]dt = 2\pi a^2 + 2b^2\pi^2.$$

От определението следва физическото тълкуване на интеграла, свързано с работата която извършва дадена сила $\mathbf{F}$ при преместване на материална точка по кривата γ от началната към крайната точка. Криволинейният интеграл от втори род е ***линеен*** и ***адитивен***, но за разлика от интеграла от първи род, ***зависи от***

ориентацията на кривата γ. Ако сменим ориентацията на γ, то допирателният вектор си променя посоката, $\boldsymbol{\tau}_{\gamma^{-1}} = -\boldsymbol{\tau}_{\gamma}$, следователно интегралът си променя знака,

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} d\mathbf{r} = -\int_{\gamma^{-1}} \mathbf{F} d\mathbf{r}.$$

3. Формула на Грийн. В този раздел ще разглеждаме равнинни криволинейни интеграли от втори род

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

където $\mathbf{F} = (P,Q)$, $d\mathbf{r} = (dx,dy)$. Ще разглеждаме само гладки или частично гладки криви. Кривата $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, се нарича ***проста***, когато няма точки на самопресичане и ***затворена***, когато крайната и началната точка съвпадат. Съвпадението на началната и крайната точка не се счита за самопресичане. Когато кривата е едновременно проста и затворена, се нарича ***жорданова***. Една жорданова крива γ разделя равнината на две области по очевиден признак (Рис. 6.6).

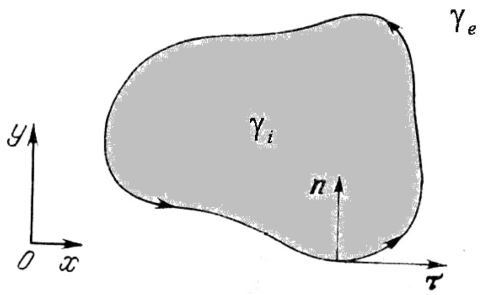

Рис. 6.6.

Едната област γ_i се нарича ***вътрешност*** на кривата, а другата γ_e се нарича ***външност*** на кривата. По този начин $\mathrm{R}^2 = \gamma \cup \gamma_i \cup \gamma_e$, което е съдържанието на една важна и изненадващо сложна за (строго) доказване ***теорема на Жордан***. На рис. 6.6, вътрешността γ_i е оцветена в сиво. Жордановите криви ще предполагаме положително ориентирани, освен ако изрично не е указано противното, което означава движение на текущата точка при нарастване на параметъра в посока обратна на въртенето на часовниковата стрелка. При положителна ориентация на γ, единичният нормален вектор $\mathbf{n}$ към γ (който образува заедно с допирателния вектор $\boldsymbol{\tau}$ дясна локална координатна система) е насочен към вътрешността на кривата (Рис. 6.6).

Ориентацията на една крива е относително понятие и зависи от ориентацията на координатната система. На рис. 6.6 кривата γ е положително ориентирана, понеже самата координатна система Oxy се разглежда като положително ориентирана.

Област $D \subset \mathrm{R}^2$ се нарича отворено и линейно свързано множество, а затворена област $\overline{D} = D \cup \partial D$ се нарича обединението на областта с нейната граница. Ако областта представлява вътрешност на дадена жорданова крива γ, $D = \gamma_i$, то нейната граница е самата крива, $\partial D = \gamma$. Векторното поле $\mathbf{F}(P,Q)$ се нарича ***гладко*** в множеството E, когато координатните функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ имат непрекъснати частни производни в някакво отворено множество, което съдържа E. Символът $\oint$ означава, че интегралът е по затворена крива.

Теорема 6.1 ***(Грийн).*** Нека γ е жорданова крива с вътрешност областта D и нека векторното поле $\mathbf{F}(P,Q)$ е гладко в затворената област $\overline{D} = D \cup \gamma$. Тогава е в сила равенството (***формула на Грийн***)

(6.9) $$\oint_\gamma P dx + Q dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy.$$

Доказателство. Доказателството ще проведем само за области D, които могат да се представят като крайно обединение от криволинейни трапеци от вида

(6.10) $$\left| \begin{array}{l} a \le x \le b \\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \end{array} \right.$$

и като крайно обединение на криволинейни трапеци от вида

(6.11) $$\left| \begin{array}{l} c \le y \le d \\ \varphi(y) \le x \le \psi(y) \end{array} \right. .$$

Да разгледаме отначало случая когато $Q(x,y) \equiv 0$. Тогава (6.9) се свежда до

(6.12) $$\oint_\gamma P(x,y)dx = -\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy.$$

Да предположим отначало, че областта D е криволинейния трапец (6.10) (Рис. 6.7). В този случай контурът γ се състои от четири дъги, $\gamma : PQ \cup QR \cup RS \cup SP$.

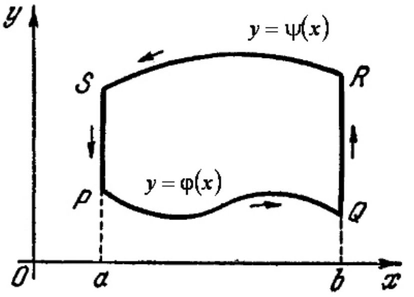

Рис. 6.7.

За дъгите PQ и $SR = RS^{-1}$ имаме следната параметризация $y = \psi(x)$

$$PQ : \left| \begin{array}{l} x = x \\ y = \varphi(x) \\ a \le x \le b \end{array} \right. \text{ и } RS^{-1} : \left| \begin{array}{l} x = x \\ y = \psi(x) \\ a \le x \le b \end{array} \right.$$

а по вертикалните дъги QR и SP имаме $dx = 0$, следователно

$$\int_{QR} P(x,y)dx = \int_{SP} P(x,y)dx = 0,$$

откъдето за интеграла в лявата страна на (6.12) намираме

(6.13) $$\begin{aligned} \oint_\gamma P(x,y)dx &= \int_{PQ} P(x,y)dx + \int_{QR} P(x,y)dx + \int_{RS} P(x,y)dx + \int_{SP} P(x,y)dx = \\ &= \int_{PQ} P(x,y)dx - \int_{SR} P(x,y)dx = \int_a^b P(x,\varphi(x))dx - \int_a^b P(x,\psi(x))dx \end{aligned}$$

От друга страна съгласно правилото за свеждане на двойния интеграл към повторен имаме

$$-\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = -\int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy\right]dx = -\int_a^b \left[P(x,y)\Big|_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\right]dx =$$

$$= -\int_a^b [P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))]dx = \int_a^b P(x,\varphi(x))dx - \int_a^b P(x,\psi(x))dx$$

което заедно с (6.13) доказва верността на формулата (6.12) в този случай. В общия случай областта D по предположение може да се представи като крайно обединение на криволинейни трапеци, както е показано например на рис. 6.8.

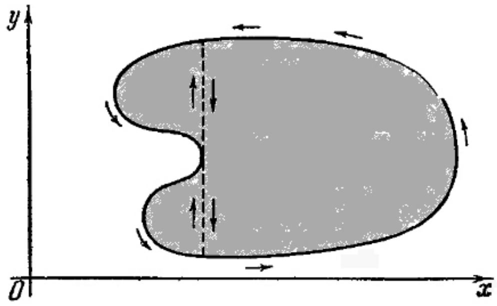

Рис. 6.8.

Тук верността на (6.12) се получава след прилагане адитивното свойство както на криволинейния интеграл от втори род така и на двойния интеграл, отчитайки, че криволинейните интеграли по допълнителните дъги взаимно се съкращават.

Разсъждавайки по аналогичен начин намираме, че

(6.14) $\oint_\gamma Q(x,y)dy = \iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dxdy$.

Сега за да получим доказателство на теоремата е достатъчно да съберем почленно формулите (6.12) и (6.14). ■

Формулата (6.9) може да се използва например за намиране лица на области. Ако положим $Q = x$ и $P \equiv 0$, то (6.9) дава

$$\oint_\gamma xdy = \iint_D dxdy = \mu(D).$$

Аналогично полагайки $P = -y$ и $Q \equiv 0$, получаваме друга формула

$$\oint_\gamma -ydx = \iint_D dxdy = \mu(D),$$ и т.н.

4. Независимост на интеграла от пътя. Формулата на Грийн е валидна при значително по-общи предположения за областта D и кривата γ. Например нека областта D е между кривите γ_1 и γ_2 , както е показано на рис. 6.9.

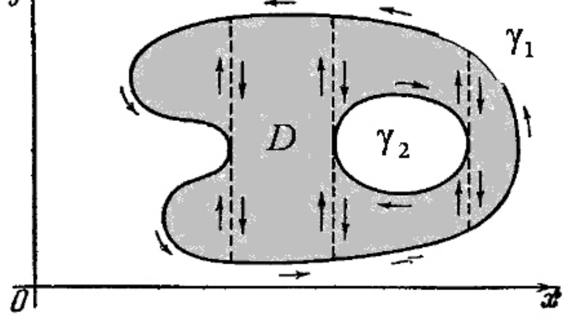

Рис. 6.9.

Границата на тази област се състои от обединението на γ_1 и γ_2, $\gamma = \partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Да разделим D на криволинейни трапеци, както е показано на рисунката и да приложим за всеки елементарен трапец формулата на Грийн. Тогава криволинейните интеграли по допълнителните контури се съкращават и в крайна сметка получаваме отново равенството (6.9). Тук кривата γ_1 е положително ориентирана, а γ_2 е отрицателно ориентирана.

В рис. 6.9 обаче областта D не е едносвързана. Една област $D \subset \mathsf{R}^2$ се нарича е ***едносвързана***, когато заедно с всяка своя жорданова крива $\gamma \subset D$, съдържа и нейната вътрешност, $\gamma_i \subset D$.

Нека диференциалната форма $Pdx + Qdy$ е породена от пълния диференциал на някаква гладка функция, $dU = Pdx + Qdy$, което означава, че $U'_x = P$ и $U'_y = Q$. Тогава криволинейният интеграл от втори род по кривата $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, не зависи от вида на кривата а само от началната и крайната точка, понеже

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int_\gamma U'_x dx + U'_y dy =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[U'_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) + U'_y(x(t), y(t))\dot{y}(t)\right]dt = \int_\alpha^\beta dU(x(t), y(t))dt =$$

$$= U(x(t), y(t))\Big|_\alpha^\beta = U(x(\beta), y(\beta)) - U(x(\alpha), y(\alpha))$$

В този случай функцията $U(x, y)$ се нарича ***потенциал*** на формата $Pdx + Qdy$ или още потенциал на векторното поле $\mathbf{F}(P, Q)$. Например да пресметнем интеграла

$$I = \int_\gamma ydx + xdy,$$

където γ е гладка крива с начална точка $M_0(0,0)$ и крайна $M_1(1,2)$. Тук диференциалната форма $ydx + xdy$ е пълен диференциал на функцията $U = xy$, следователно

$$I = xy\Big|_{(0,0)}^{(1,2)} = 1.2 - 0.0 = 2.$$

Ако формата има потенциал, $Pdx + Qdy = dU$, то интегралът по всяка затворена крива е нула, понеже стойността на U в началната и крайната точка (които съвпадат) е една и съща.

Твърдение 6.1. Нека $D \subset \mathsf{R}^2$ е област, а функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са непрекъснати в D. Тогава криволинейният интеграл

$$\int_\gamma Pdx + Qdy$$

не зависи от вида на кривата $\gamma \subset D$, а само от началната и от крайната точки, тогава и само тогава, когато диференциалната форма $Pdx + Qdy$ има потенциал, което означава, че съществува някаква гладка в D функция $U(x, y)$, за която $U'_x(x, y) = P(x, y)$ и $U'_y(x, y) = Q(x, y)$, за всяко $(x, y) \in D$.

Доказателство. Остава да покажем, че ако интегралът не зависи от вида на кривата, то съществува функция $U(x, y)$ с описаните свойства. Да фиксираме една точка $M_0(x_0, y_0) \in D$ и да положим

$$U(x, y) = \int_\gamma Pdx + Qdy = \int_{M_0}^{M} Pdx + Qdy,$$

където γ е коя да е частично гладка крива с начало в точката M_0 и край в точката $M(x,y)$. По предположение интегралът не зависи по пътя, следователно даденото определение за $U(x,y)$ е коректно. Тогава съгласно адитивното свойство на интеграла за диференчното частно намираме

(6.15) $$\frac{U(x+\Delta x,y)-U(x,y)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\int_J Pdx+Qdy,$$

където J е отсечката с начална точка (x,y) и крайна точка $(x+\Delta x,y)$. Тази отсечка има следното параметрично представяне

$$J:\left|\begin{array}{l} x\to x+t\Delta x \\ \quad y\to y \\ \quad 0\le t\le 1 \end{array}\right.$$

Тук $dx=\Delta x dt$ и $dy=0$. Сега като заместим в (6.15) намираме

$$\frac{U(x+\Delta x,y)-U(x,y)}{\Delta x}=\int_0^1 P(x+t\Delta x,y)dt,$$

от което съгласно теоремата за средните стойности, получаваме

$$\frac{U(x+\Delta x,y)-U(x,y)}{\Delta x}=P(x+\xi\Delta x,y),\ \xi\in(0,1),$$

следователно

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{U(x+\Delta x,y)-U(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P(x+\xi\Delta x,y)=P(x,y).$$

Последното по определение означава, че $U'_x(x,y)=P(x,y)$. Аналогично се доказва, че $U'_y(x,y)=Q(x,y)$. ■

Като диференцираме равенството $U'_x(x,y)=P(x,y)$ по променливата y получаваме $U''_{xy}(x,y)=P'_y(x,y)$, а като диференцираме равенството $U'_y(x,y)=Q(x,y)$ по променливата x получаваме $U''_{yx}(x,y)=Q'_x(x,y)$. Следователно, ако интегралът не зависи от пътя, то по необходимост навсякъде в областта е налице равенството

(6.16) $Q'_x(x,y)=P'_y(x,y)$.

Може да се докаже, че условието за независимост на интеграла от пътя е еквивалентно на условието интегралът да бъде равен на нула по всяка затворена (частично гладка) крива. Последното заключени е интуитивно ясно поради следните съображения. Нека γ_1 и γ_2 са две криви с общо начало и общ край. Тогава кривата $\gamma=\gamma_1\gamma_2^{-1}$ е затворена, а от свойствата на интеграла имаме

(6.17) $$\oint_\gamma Pdx+Qdy=\int_{\gamma_1}Pdx+Qdy-\int_{\gamma_2}Pdx+Qdy.$$

Ако интегралът по всяка затворена крива е равен на нула, то ще бъде равен на нула в частност и по кривата $\gamma=\gamma_1\gamma_2^{-1}$, следователно от (6.17) намираме

$$\int_{\gamma_1}Pdx+Qdy=\int_{\gamma_2}Pdx+Qdy,$$

което означава, че стойността на интеграла е една и съща по двата пътя γ_1 и γ_2. Да предположим сега, че интегралът не зависи от пътя и нека γ е някаква затворена частично гладка крива. Да изберем две различни точки $M_1\in\gamma$ и $M_2\in\gamma$. Тези две точки разделят затворената крива γ на две криви γ_1 и γ_2 с общо начало в точката M_1 и общ край в точката M_2, а самата крива γ според нейната ориентация може да се запише във вида $\gamma = \gamma_1\gamma_2^{-1}$ или $\gamma = \gamma_2\gamma_1^{-1}$. Понеже интегралът по предположение не зависи от пътя, имаме

$$0 = \int_{\gamma_1} Pdx + Qdy - \int_{\gamma_2} Pdx + Qdy =$$

$$= \int_{\gamma_1} Pdx + Qdy + \int_{\gamma_2^{-1}} Pdx + Qdy = \int_{\gamma_1\gamma_2^{-1}} Pdx + Qdy = \oint_{\gamma} Pdx + Qdy.$$

Да се върнем към необходимото условие (6.16) за независимост на интеграла от пътя. В случая на едносвързана област това условие е и достатъчно.

Теорема 6.2. Нека $D \subset \mathbb{R}^2$ е ***едносвързана*** област, а функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имат непрекъснати частни производни в D. В такъв случай криволинейният интеграл

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy$$

не зависи от пътя $\gamma \subset D$ тогава и само тогава, когато

$$Q'_x(x, y) = P'_y(x, y),$$

за всяко $(x, y) \in D$. ■

Теорема 6.2 и твърдение 6.1 откриват пред нас следната задача за ***възстановяване на функция по известен пълен диференциал***. Ако $D \subset \mathbb{R}^2$ е едносвързана област и функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имат непрекъснати частни производни в D, то да се намери функция $U(x, y)$ такава, че

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,\ U'_x(x, y) = P(x, y),\ U'_y(x, y) = Q(x, y).$$

Съгласно доказателството на твърдение 6.1, една такава функция може да се намери по формулата

$$U(x, y) = \int_{M_0}^{M} Pdx + Qdy,$$

където интегралът се взема по една (коя да е) частично гладка крива с начало във фиксираната точка $M_0(x_0, y_0)$ и край в текущата точка $M(x, y)$. Съществуват и други начини за търсене на $U(x, y)$ чрез техниката на неопределения интеграл.