

Общински кръг на LVIII Републиканска олимпиада по математика
15 март 2009 година – София

9. клас

1. Решете уравненията:

а) $3\left(x^2 - \frac{8}{x}\right) : (x^2 + 2x + 4) = \frac{5x - 15}{x^2 - x - 6};$ **3 точки**

б) $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} + x^2 + 2x = 7.$ **4 точки**

2. Даден е триъгълник ABC ($AC < BC$). В триъгълника е вписана окръжност с център O , която се допира до страните му AB , BC и AC съответно в точките M , N и P . Ъглополовящата на $\angle ACB$ пресича страната AB в точка L . Ако $ML = 1$ cm, $CP = 3$ cm и $LN \parallel AC$, намерете:

а) дължините на страните на $\triangle ABC$; **5 точки**

б) отношението $CO : OL$. **2 точки**

3. Дадено е уравнението $mx^4 - (2m - 1)x^2 + m - 2 = 0$. Намерете стойностите на параметъра m , за които уравнението:

а) има два различни реални корена; **3 точки**

б) има четири различни реални корена x_1, x_2, x_3 и x_4 , за които е изпълнено, че $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 6x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2$. **4 точки**

Общински кръг на LVIII Републиканска олимпиада по математика
15 март 2009 година – София

10. клас

1. Решете системата $\begin{cases} x^4 - 6x^2 - 7 > 0 \\ \frac{4x - 9}{x - 2} \geq x \end{cases}$ и проверете дали числото

$a = \frac{3^{\frac{3}{4}} - 3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{4}}} - \sqrt[4]{3^5} + 1$ е решение на системата. **7 точки**

2. а) Намерете най-голямата и най-малката стойности на функцията $y = -3x^2 + 2x - 4$, когато x се изменя в интервала $[-1; 1]$.

4 точки

б) Намерете стойностите на параметъра a , за които неравенството $-3x^2 + 2x - a^2 + 4a - \frac{10}{3} \leq 0$ е изпълнено за всички стойности на x от интервала $[-1; 1]$.

3 точки

3. Дадено е уравнението $(m + 1)4^{-|x+2|} - m2^{1-|x+2|} + 3m - 1 = 0$.

Намерете стойностите на параметъра m , за които уравнението:

а) има решение; **4 точки**

б) има точно един неотрицателен корен. **3 точки**