

11. клас

1. Сборът на три различни числа е 21. Намерете тези числа, ако те са едновременно:

а) последователни членове на геометрична прогресия и съответно първи, десети и двадесет и осми член на аритметична прогресия;

3 точки

б) първи, десети и двадесет и осми член на аритметична и геометрична прогресия.

4 точки

2. Членовете на геометричната прогресия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ са различни положителни числа.

а) Ако със S_n е означен сборът на първите n члена на дадената прогресия, докажете, че за всяко естествено число n е в сила равенството $\frac{S_n}{S_{2n} - S_n} = \frac{S_{2n} - S_n}{S_{3n} - S_{2n}}$;

3 точки

б) Намерете произведението $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n$, ако

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = p \text{ и } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} = t.$$

4 точки

3. а) Ако $\alpha \neq 90^\circ + k180^\circ$ и $\alpha \neq \pm 30^\circ + k180^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), докажете, че $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha) + \operatorname{tg}(120^\circ + \alpha) = 3 \operatorname{tg} 3\alpha$.

3 точки

б) Намерете стойността на израза $\operatorname{tg} 54^\circ (\operatorname{tg} 3^\circ + \operatorname{tg} 13^\circ + \operatorname{tg} 23^\circ + \dots + \operatorname{tg} 163^\circ + \operatorname{tg} 173^\circ)$.

4 точки

12. клас

1. а) Пресметнете стойността на израза

$$A = 5^{\log_{0,2} \frac{1}{2}} + \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1) + \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

3 точки

б) Намерете двойките числа $(x; y)$, за които е изпълнено равенството $(\log_3 5)^{\sqrt{x-2y+1}} = (\log_5 3)^{\sqrt{x^2-y^2+5y-3}}$.

4 точки

2. Всички ръбове на правилната триъгълна призма $ABC A_1 B_1 C_1$ имат дължина 1. Точките M и N са средите съответно на ръбовете AB и CC_1 . Намерете:

а) дължината на отсечката MN и косинуса на ъгъла между правите MN и BA_1 ;

3 точки

б) разстоянието от точка A_1 до равнината $(B_1 MN)$.

4 точки

3. Дадена е функцията $f(x) = (-2x - 2)^{\frac{1}{3}} + (x + 1)^{\frac{1}{2}}$.

а) Намерете най-малката стойност на функцията;

3 точки

б) За кои стойности на параметъра a уравнението

$$(-2x - 2)^{\frac{1}{3}} + (x + 1)^{\frac{1}{2}} = a$$

има единствено решение?

4 точки