

Утвърждавам:

ГАЛИНА ЕВДЕНОВА
НАЧАЛНИК РИО-ВРАЦА

Олимпиада по математика

общински кръг-16.03.08г.

1. Теми по математика за IV,V,VI,VII,VIII,IX,X,XI и XII клас
2. Решения на задачите и указания за оценяване по класове



ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

IV клас

Зад.1 а) Намерете числата А, В и С, където $A=(812:4).8+(5334-4352):2-107$,
 $B=(1321.7-7.1319):(1263-1256)$ и $C=A-B:2$. Колко пъти числото А е по-голямо от числото В?

б) Намислих едно число. От него извадих 6 и полученото разделих на 3. От частното извадих 1 и полученото число умножих с 2. Получих двуцифрено число, на което цифрата на единиците е три пъти по-малка от цифрата на десетиците. Кое число съм намислил?

(7 точки)

Зад.2 Разликата на две съседни страни на един правоъгълник е 60 мм, а дължината на една от страните му е 9 см. Намерете обиколката и лицето на този правоъгълник.

(7 точки)

Зад.3 В девет часа сутринта от Габрово за Варна тръгнал камион, който за половин час изминава 35 км. След един час от Варна за Габрово тръгнала лека кола, която се движи с 10 км/ч по-бързо от камиона. В колко часа са се срещнали двете превозни средства, ако те не са спирани по време на пътуването, а разстоянието между двата града е 370 км?

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

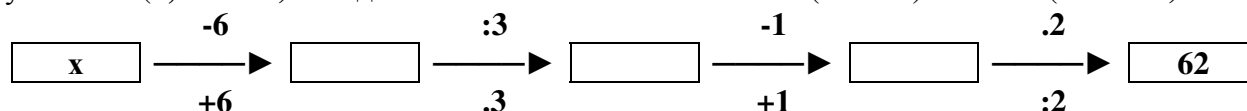
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

16. 03. 2008г.

Указание за проверка

IV клас

- Зад.1 а)** Пресмятане на $812:4=203$. (0,25 точки)
 Пресмятане на $203.8=1624$. (0,25 точки)
 Пресмятане на $5334-4352=982$. (0,25 точки)
 Пресмятане на $982:2=491$. (0,25 точки)
 Пресмятане на $1624+491=2115$. (0,25 точки)
 Пресмятане на $A=2115-107=2008$. (0,25 точки)
 $B=(1321.7-7.1319):(1263-1256)=7.(1321-1319):7=2$ (1 точка)
 $C=A-B:2=2008-2:2=2007$ (0,25 точки).
 Числото А е 1004 пъти по-голямо от числото В, защото $2008:2=1004$ (0,25 точки).
б) Ако намисленото число е x , то съгласно условието на задачата резултатът $((x-6):3-1).2$ е 93, 62 или 31 (1,5 точки) и тъй като при умножение с 2 се получава четно число, то крайният резултат е 62 (0,5 точки). Следователно намисленото число $x=(62:2+1).3+6=102$ (2 точки).



- Зад.2** Нека означим с a и b дължините съответно на неизвестната и известната страна на правоъгълника. По условие $b = 9$ см.

$$60 \text{ мм} = 6 \text{ см} \text{ (1 точка)}$$

$$\text{I сл.) } a > 9, \text{ тогава } a - 9 = 6$$

$$\Rightarrow a = 15 \text{ см (1 точка), } P = 48 \text{ см (1 точка) и } S = 135 \text{ кв.см (1 точка).}$$

$$\text{II сл. } a < 9, \text{ тогава } 9 - a = 6$$

$$\Rightarrow a = 3 \text{ см (1 точка), } P = 24 \text{ см (1 точка) и } S = 27 \text{ кв.см (1 точка).}$$

- Зад.3** Намиране скоростта на камиона $35.2 = 70$ км/ч. (1 точка)

$$\text{Скоростта на леката кола е } 70 \text{ км/ч} + 10 \text{ км/ч} = 80 \text{ км/ч. (1 точка)}$$

$$\text{Камионът и леката кола изминават общо за един час } 70 \text{ км/ч} + 80 \text{ км/ч} = 150 \text{ км/ч. (1 точка)}$$

Камионът се е движил един час по-вече и за това време е изминал 70 км (1 точка), следователно останалият път е $370 \text{ км} - 70 \text{ км} = 300 \text{ км}$ (1 точка). Този път е изминат от камиона и колата за $300:150 = 2$ часа (1 точка). Следователно срещата се е състояла в $9+1+2 = 12$ часа (1 точка).

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03.2008г.

V клас

Зад.1 Да се намери:

- а)** стойността на израза $A=3,42.2,44+15,32.5,7-5,7.5,32+6,58.2,44$
- б)** неизвестното число x , ако $(21.x+112,12).0,2-17,12.0,2=1,6:0,04$
- в)** обикновената дроб с числител и знаменател съответно равни на цифрата на десетиците и цифрата на стотните на частното $A:x$

(7 точки)

Зад.2 Градовете Русе и Видин са разположени на брега на река Дунав, съответно на 495 км и 855 км от устието на реката (мястото, където реката се влива в морето). Едновременно от двете пристанища тръгват един срещу друг два парахода, които имат една и съща скорост в спокойна вода - 49 км /ч, а скоростта на течението е 4 км /ч.

- а)** Какво ще бъде разстоянието между тях след 1, 5 часа от тръгването им?
- б)** Когато параходът от Русе бъде на средата на пътя между Русе и Видин, какво ще бъде разстоянието между парахода от Видин и устието на реката?

(7 точки)

Зад.3 За провеждането на томбола в едно училище били закупени 30 химикалки на стойност 35,78 лв.. Част от химикалките стрували по 1,34 лв., а останалите по 1 лв. По колко химикалки от всеки вид са закупени?

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

Указание за проверка

V клас

Зад.1а) $A=3,42.2,44+15,32.5,7-5,7.5,32+6,58.2,44=2,44.(3,42+6,58)+5,7.(15,32-5,32)=$
 $2,44.10+5,7.10=24,4+57=81,4$ **(2 точки)**

б) $(21.x+112,12).0,2-17,12.0,2=1,6:0,04$

$$(21.x+112,12).0,2=40+3,424$$

$$21.x+112,12=43,424:0,2$$

$$21.x=217,12-112,12$$

$$x=105:21$$

$$x=5$$

(3 точки)

в) $A:x=81,4:5=16,28$

Търсената дроб е $\frac{1}{8}$.

(2 точки)

Зад.2 а) Намираме пътя между Видин и Русе: $855-495=360$ км. **(1 точка)**

Скоростта на парахода от Видин е $49+4=53$ км/ч, а на парахода от Русе е $49-4=45$ км/ч.

(1 точка)

Разстоянието между параходите след 1,5 ч е $360-(45+53).1,5=360-147=213$ км.

(1 точка)

б) Намираме половината от пътя между Видин и Русе: $360:2=180$ км.

(1 точка)

Параходът от Русе ще измине това разстояние за $180:45=4$ ч **(1 точка)**

За това време параходът от Видин изминава $53.4=212$ км. **(1 точка)**

Разстоянието до устието на реката е $855-212=643$ км. **(1 точка)**

Зад.3 Ако всички химикалки са от 1 лв., то необходимата сума е 30 лв.**(2 точки)**, което е по-малко от 35,78 лв. с 5,78 лв.**(1 точка)**. Разликата се дължи на по-скъпите с 0,34 лв.**(1 точка)** химикалки и техният брой е $5,78 : 0,34 = 17$ **(2 точки)**. Броят на химикалките от 1 лв. е $30-17=13$ **(1 точка)**.

ОБЩНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

VI клас

Зад.1 Годишната лихва в банка е 4% и лихвата се капитализира в края на всяка година. Каква най-малка сума (с точност до 1 лв.) трябва да се внесе в банката, за да разполагаме след две години с 5000 лв.?

(7 точки)

Зад.2 Дадена е координатна система XOY с единична отсечка 1 см.

а) Изобразете в координатната система точките K(1;1), L(-3,5;1), M(1;0), N(-3;-2), P(0;-4), R(3;-3), S(-3;0), T(0;3). Намерете лицата на четириъгълниците TSPM и KLNK.

б) Намерете координатите на всички точки, които образуват успоредник с точките A(-4;2), B(2;2) и C(2;8) и лицата на тези успоредници.

(7 точки)

Зад.3 Дадени са изразите $A = \frac{8^3 \cdot 4^{12}}{2^5 \cdot 32^5}$ и $B = \frac{2 \cdot 7^{n+1} + 5 \cdot 7^{n+1}}{50 \cdot 7^{n-1} - 7^{n-1}}$, където n е естествено число.

Сравнете стойностите на A^{32} и B^{36} .

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

Указание за проверка

VI клас

Зад.1 Ако са внесени x лв, то след две години сумата ще е $x \cdot (1+0,04)^2 = x \cdot 1,04^2$ (**3 точки**).
Трябва да намерим неизвестното x от равенството $x \cdot 1,04^2 = 5000$. (**2 точки**).
Получаваме $x = 5000 : 1,04^2 = 4622,78 \approx 4623$ лв (**2 точки**).

Зад.2 а) Изобразяване в координатната система на точките
 $K(1;1)$, $L(-3;5)$, $M(1;0)$, $N(-3;-2)$, $P(0;-4)$, $R(3;-3)$, $S(-3;0)$, $T(0;3)$ (**2 точки**).
Намерено $S_{KLNK} = 17,75 \text{ cm}^2$ (**2 точки**).
Намерено $S_{TSPM} = 14 \text{ cm}^2$ (**1 точка**).

б) Намиране на точките $D(-4;8)$, $E(8;8)$, $F(-4;-4)$ (**0,75 точки**).

Намиране на $S_{ABCD} = 36 \text{ cm}^2$ (**0,25 точки**) и $S_{ABEC} = S_{ACBE} = 36 \text{ cm}^2$ (**1 точка**).

Зад.3 Намерени стойностите на изразите A и B , както следва: $A = 8$ (**2,5 точки**), $B = 7$ (**2,5 точки**).
 $A^{32} = ((2^3)^{32}) = 2^{96} = (2^8)^{12}$ (**0,5 точки**), $B^{36} = 7^{36} = (7^3)^{12}$ (**0,5 точки**).
Извод от сравняването на A^{32} и B^{36} : $2^8 < 7^3 \Rightarrow (2^8)^{12} < (7^3)^{12}$, т.е. $A^{32} < B^{36}$ (**1 точка**).

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

VII клас

Зад.1 Галерия продала две малки пластики, едната с 1000 лв. по-скъпа от другата и картина, която е 5 пъти по-скъпа от втората пластика. От тази продажба галерията получила 2000 лв. комисионна. Каква е цената на продадените предмети на изкуството, ако комисионната е 10% от цената им?

(7 точки)

Зад.2 Даден е триъгълник ABC. Със страни страните AC и BC вън от триъгълника са построени равнобедрени правоъгълни триъгълници ACB_1 и CBA_1 с прави ъгли при върха C. Докажете, че отсечките AA_1 и BB_1 са равни и перпендикулярни.

(7 точки)

Зад.3 Да се намерят стойностите на a, b, c удовлетворяващи равенството
$$a^2 - 2a + 1 + |b - c - 5| + |c| = 0.$$

При така намерените стойности на a, b и c да се разложи на множители многочлена

$$M = 2ax^4 + (b - c)x^3 + (a + b)x^2 + bx + 3c^2 + 2.$$

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

Указание за проверка

VII клас

Зад.1 Ако първата пластика е продадена за x лв. ($x > 0$), то втората пластика и картината са продадени съответно за $x + 1000$ лв. и $5 \cdot (x + 1000)$ лв. **(2 точки)**.

Съгласно условието на задачата $\frac{10}{100} \cdot (x + (x + 1000) + 5(x + 1000)) = 2000$ **(2 точки)**.

Намиране цените на пластиките съответно 2000 лв. и 3000 лв. **(2 точки)**.

Намиране цената на картината-15000лв. **(1 точка)**.

Зад.2 Доказване еднаквостта на $\triangle A_1AC$ и $\triangle BB_1C$ **(2 точки)**.

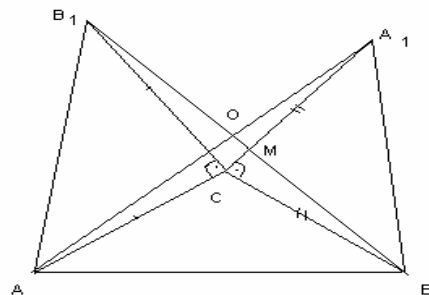
$AA_1 = BB_1$ и $(1) \angle CBB_1 = \angle CA_1A$ (съответни елементи в еднакви триъгълници) **(2 точки)**.

Нека BB_1 пресича страната CA_1 в точка M /Ако B_1B не пресича страната CA_1 , използвайте пресечната точка на B_1B с AC /.

$(2) \angle OMA_1 = \angle BMC$ (противоположни ъгли в $\triangle OMA_1$ и $\triangle CMB$) **(1 точка)**.

От (1) и (2) $\Rightarrow \angle A_1OM = \angle MCB = 90^\circ$ **(1 точка)**

$\Rightarrow B_1B \perp AA_1$ **(1 точка)**.



Зад.3 $a^2 - 2a + 1 + |b - c - 5| + |c| = 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + |b - c - 5| + |c| = 0 \Rightarrow a = 1, c = 0, b = 5$ **(2 точки)**.

За намиране на многочлена $M = 2x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 2$ **(1 точка)**.

За разлагането $M = 2x^4 + 2x^3 + 3x^3 + 3x^2 + 3x^2 + 3x + 2x + 2 = (x + 1) \cdot (2x^3 + 3x^2 + 3x + 2)$ **(2 точки)**.

За разлагането $M = 2x^3 + 2x^2 + x^2 + x + 2x + 2 = (x + 1)^2(2x^2 + x + 2)$ **(2 точки)**.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

Указание за проверка

VII клас

Зад.1 Ако първата пластика е продадена за x лв. ($x > 0$), то втората пластика и картината са продадени съответно за $x + 1000$ лв. и $5 \cdot (x + 1000)$ лв. **(2 точки)**.

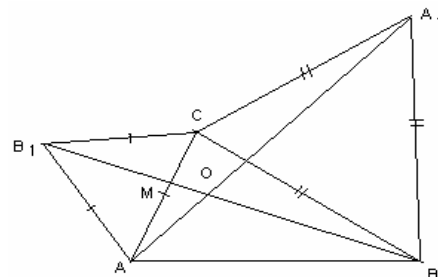
Съгласно условието на задачата $\frac{10}{100} \cdot (x + (x + 1000) + 5(x + 1000)) = 2000$ **(2 точки)**.

Намиране цените на пластиките съответно 2000 лв. и 3000 лв. **(2 точки)**.

Намиране цената на картината-15000лв.**(1 точка)**.

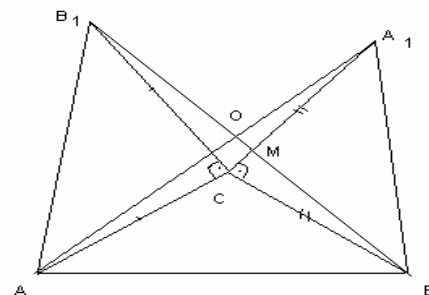
Зад.2 а) Нека BB_1 пресича страната AC в точка M . Доказване еднаквостта на $\triangle AA_1C$ и $\triangle B_1BC$ **(1,5 точки)**.

Тъй като $\angle CB_1B = \angle CAA_1$ (съответни ъгли в еднакви триъгълници) и $\angle OMA = \angle B_1MC$ (връхни ъгли), то $\angle MCB_1 = \angle AOM = 60^\circ$ **(1,5 точки)**. Следователно $\angle AOB = 120^\circ$ (свойство на съседните ъгли) **(0,5 точки)**. /Ако B_1B не пресича страната AC , използвайте пресечната точка на B_1B с A_1C /.



б) Нека BB_1 пресича страната CA_1 в точка M . Доказване еднаквостта на $\triangle A_1AC$ и $\triangle BB_1C$ **(1,5 точки)**.

$AA_1 = BB_1$ и $\angle CBV_1 = \angle CA_1A$ (съответни елементи в еднакви триъгълници) **(1 точка)**, $\angle OMA_1 = \angle BMC$ (връхни ъгли) **(0,5 точки)** $\Rightarrow \angle A_1OM = \angle MCB = 90^\circ \Leftrightarrow B_1B \perp AA_1$ **(0,5 точки)**.



Зад.3 $a^2 - 2a + 1 + |b - c - 5| + |c| = 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + |b - c - 5| + |c| = 0 \Rightarrow a = 1, c = 0, b = 5$ **(2 точки)**.

За намиране на многочлена $M = 2x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 2$ **(1 точка)**.

За разлагането $M = 2x^4 + 2x^3 + 3x^3 + 3x^2 + 3x^2 + 3x + 2x + 2 = (x + 1) \cdot (2x^3 + 3x^2 + 3x + 2)$ **(2 точки)**.

За разлагането $M = 2x^3 + 2x^2 + x^2 + x + 2x + 2 = (x + 1)^2(2x^2 + x + 2)$ **(2 точки)**.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

VIII клас

Зад.1 Пресметнете стойността на израза $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - a$ при $x = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ и $a = (2 - \sqrt{6})^2$.
Намерете за кои стойности на параметъра a числото $2\sqrt{5}$ е решение на уравнението $P(x) = 0$.
(7 точки)

Зад.2 Дадено е уравнението $x^2 - 9x + q = 0$, където q е реален параметър.

а) Решете уравнението при $q = 7$ и ако корените на уравнението x_1 и x_2 са реални, различни и $x_1 < x_2$, то намерете целите числа n , за които е в сила неравенството $x_1 < n < x_2$.

б) Намерете целите положителни стойности на параметъра q , за които корените на даденото уравнение са цели числа.

(7 точки)

Зад.3 Даден е $\triangle ABC$. Върху страните му AC и BC са избрани съответно точки M и N , такива, че $AM = BN$. Точките P и Q са среди съответно на AN и BM . Да се докаже, че ъглополовящата на $\angle ACB$ е перпендикулярна на правата PQ .

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

Указание за проверка

VIII клас

Зад.1 Пресмятане на $a = (2 - \sqrt{6})^2$ (1точка). Прилагане на формулите $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^3$ (1точка) и $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$ (1точка). Намиране на стойността на израза $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - a = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$ /при $x = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ и $a = (2 - \sqrt{6})^2$ / (1точка). Пресмятане на $(2\sqrt{5})^3$ (1точка) и $(2\sqrt{5})^2$ (1точка). Извършване на тъждествени преобразувания и намиране на параметъра $a = 30\sqrt{5} + 40$ (1точка).

Зад.2 а) При $q = 7$ получаваме квадратното уравнение $x^2 - 9x + 7 = 0$.

Дискриминантата $D = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 53 \geq 0$ (0,5 точки) $\Rightarrow x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{53}}{2}$ (1 точка).

Тъй като $7 < \sqrt{53} < 8$, то $\frac{9-8}{2} < \frac{9-\sqrt{53}}{2} < \frac{9-7}{2} < \frac{9+7}{2} < \frac{9+\sqrt{53}}{2} < \frac{9+8}{2}$, то

$$0 < x_1 = \frac{9-\sqrt{53}}{2} < 1 < 8 < \frac{9+\sqrt{53}}{2} = x_2 < 9 \text{ (1 точка)}$$

Следователно търсените цели числа са: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 (1 точка).

б) Определяне $D = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot q = 81 - 4q$ на $x^2 - 9x + q = 0$ (0,5 точки).

$D \geq 0$ и q е цяло положително число $\Leftrightarrow q \in \{1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$ (1 точка).

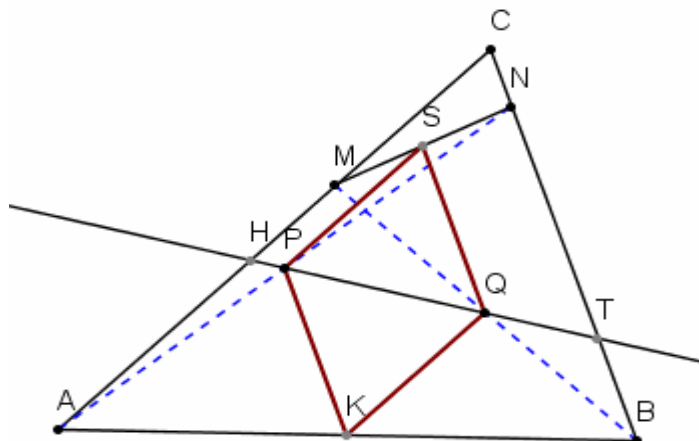
Цели положителни стойности на q , за които корените на даденото уравнение са цели числа:

Цяла положителна стойност на q	Уравнение $x^2 - 9x + q = 0$	Дискриминанта D	Цели корени x_1 и x_2	Точки
$q = 8$	$x^2 - 9x + 8 = 0$	$D = 81 - 4q = 49$	$x_1 = 1$ и $x_2 = 8$	(0,5 точки)
$q = 14$	$x^2 - 9x + 14 = 0$	$D = 81 - 4q = 25$	$x_1 = 2$ и $x_2 = 7$	(0,5 точки)
$q = 18$	$x^2 - 9x + 18 = 0$	$D = 81 - 4q = 9$	$x_1 = 3$ и $x_2 = 6$	(0,5 точка)
$q = 20$	$x^2 - 9x + 20 = 0$	$D = 81 - 4q = 1$	$x_1 = 4$ и $x_2 = 5$	(0,5 точка)

Зад.3 За да докажем, че $l_{\angle ACB} \perp PQ$ е достатъчно да докажем, че $\triangle HTC$ е равнобедрен, където H и T са пресечните точки на PQ с AC и BC (2 точки).

Нека K и S са средите съответно на AB и MN (1точка). Четириъгълникът $KQSP$ е ромб /PS, KQ, QS и KP-средни отсечки съответно в $\triangle ANM$, $\triangle ABM$, $\triangle BNM$ и $\triangle ABN$ / (1точка).

$\Rightarrow \triangle PQS$ е равнобедрен $\Rightarrow \angle SPQ = \angle SQP$ (1 точка), но $SP \parallel HC$ и $SQ \parallel TC$ (1точка) $\Rightarrow \triangle HTC$ е равнобедрен $\Rightarrow l_{\angle ACB} \perp PQ$ (1 точка).



ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

IX клас

Зад.1 Дадени са уравненията:

$$\frac{x}{27x^3+1} + \frac{x}{3x+1} - \frac{1}{3} = 0, \quad \frac{13y^2+4}{4-y^2} + \frac{7y}{y-2} = 0 \text{ и } 9z^4 - 37z^2 + 4 = 0. \text{ Кой от тях са еквивалентни?}$$

(7 точки)

Зад.2 Дадено е уравнението $(2k+1)x^2 - (k+2)x + k - 1 = 0$. Да се намерят стойностите на параметъра k , за които е изпълнено равенството $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 = \frac{3k(1-k^2)-6}{(2k+1)^3}$.

(7 точки)

Зад.3 Даден е $\triangle ABC$ с височина CH ($H \in AB$). Окръжност с диаметър CH пресича страните AC и BC съответно в точки P и Q така, че $PQ = CH$.

а) Да се докаже, че $\triangle ABC$ е правоъгълен;

б) Ако радиусът на вписаната окръжност в $\triangle ABC$ е $4\sqrt{3} + 6$ пъти по-малък от периметъра му, да се намери стойността на израза $\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$, където a, b и c са страните на триъгълника.

(7 точки)

Време за работа-4,5 часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

16. 03. 2008г.

Указание за проверка

IX клас

Зад.1 Дефиниционното множество на първото уравнение е $D: x \neq -\frac{1}{3}$.

$$(1) \frac{x}{27x^3+1} + \frac{x}{3x+1} - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{(3x+1)(9x^2-3x+1)} + \frac{x}{3x+1} - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow (3x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \in D$$

(2 точки)

Дефиниционното множество на второто уравнение е $D: y \neq \pm 2$.

$$(2) \frac{13y^2+4}{4-y^2} + \frac{7y}{y-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{13y^2+4}{(2-y)(2+y)} - \frac{7y}{2-y} = 0 \Rightarrow 3y^2 - 7y + 2 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{3} \in D, y_2 = 2 \notin D$$

(2 точки)

Решенията на уравнението (3) $9z^4 - 37z^2 + 4 = 0$ са $z_1 = \pm \frac{1}{3}, z_2 = \pm 2$

(2 точки)

$\Rightarrow$ еквивалентни са уравненията (1) и (2) (1 точка)

Зад.2 Допустимите стойности на параметъра k са всички реални числа, различни от $-\frac{1}{2}$.

(1 точка)

От формулите на Виет следва, че $x_1 x_2 = \frac{k-1}{2k+1}$ и $x_1 + x_2 = \frac{k+2}{2k+1}$.

(2 точки)

$$x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 = \frac{3k(1-k^2)-6}{(2k+1)^3} \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) = \frac{3k(1-k^2)-6}{(2k+1)^3} \Leftrightarrow$$

$$x_1 x_2 ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2) = \frac{3k(1-k^2)-6}{(2k+1)^3} \Leftrightarrow \frac{k-1}{2k+1} \left(\left(\frac{k+2}{2k+1} \right)^2 - \frac{2(k-1)}{2k+1} \right) = \frac{3k(1-k^2)-6}{(2k+1)^3}$$

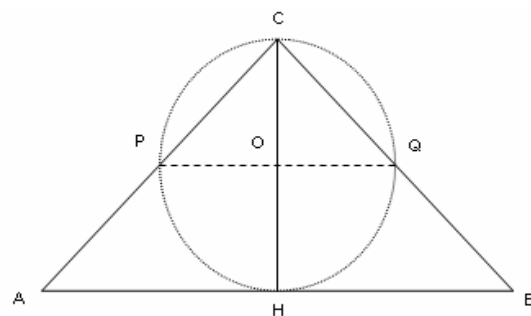
$$\Rightarrow 9k^2 - 3k = 0 \Rightarrow k = 0, k = \frac{1}{3} \text{ - допустими стойности.}$$

(4 точки)

Зад.3 а) По условие $CH = 2R$ и $PQ = CH$

$$\Rightarrow PQ = 2R \Rightarrow \angle ACB = \angle PCQ = \frac{1}{2} \widehat{PQ} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC \text{ е}$$

правоъгълен (2 точки).



б) От $\triangle ABC$ - правоъгълен

$$\Rightarrow r = p - c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2} \text{ (1 точка).}$$

$$\text{По условие } \frac{P_{ABC}}{r} = 4\sqrt{3} + 6 \Rightarrow \frac{a+b+c}{\frac{a+b-c}{2}} = 4\sqrt{3} + 6$$

$$\Rightarrow 2(a+b) + 2c = (4\sqrt{3} + 6)(a+b) - (4\sqrt{3} + 6)c \Rightarrow (4\sqrt{3} + 4)(a+b) = (4\sqrt{3} + 8)c$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{4\sqrt{3} + 8}{4\sqrt{3} + 4} \Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)}{3 - 1} = \frac{2\sqrt{3} + 3 - 2 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \text{ (4 точки).}$$

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

X клас

Зад.1 Определете допустимите стойности на променливите и опростете израза

$$C = \frac{x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}}{(x^2 - xy)^{\frac{2}{3}}} \cdot \left(\frac{(x^{-1} - yx^{-2})^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1} - xy - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{-1}}.$$

(7 точки)

Зад.2 Решете неравенството $x + b + 28a \leq \frac{2x+7}{x+1} + \frac{x^2-4}{2+x-x^2}$, където a и b са съответно най-голямата и най-малката стойност на функцията $y = -2x^2 + 4x + 1$ в интервала $[-3;0]$.

(7 точки)

Зад.3 Права, минаваща през точката А, пресича окръжност в точките В и С точката (В лежи между точките А и С). Друга права, минаваща през точката А, пресича окръжността в точките D и E (точката D лежи между точките А и E). Известно е, че правите BD и CE се пресичат в точката F, освен това FE=1 и AC=2AE.

а) Да се докаже, че $\angle EDF = \angle BCF$.

б) Да се намери дължината на отсечката FD.

(7 точки)

Време за работа-4,5 часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

Указание за проверка

Х клас

Зад.1 Допустимите стойности на променливите са $x > 0, y \geq 0, x \neq y$ (**1,5 точки**).

$$C = \frac{x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}}{(x^2 - xy)^{\frac{2}{3}}} \cdot \left(\frac{(x^{-1} - yx^{-2})^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1} - xy - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{-1}} =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}}{(x^2 - xy)^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} \right)^{\frac{1}{3}}} - xy - (x^2 + y^2) \text{ (2 точки)} = \frac{x^{\left(\frac{3}{2}\right)^2} - y^{\left(\frac{3}{2}\right)^2}}{(x^2 - xy)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{x - y}{x^2} \right)^{\frac{1}{3}}} - xy - x^2 - y^2 \text{ (1,5 точки)}$$

$$= \frac{x^3 - y^3}{x^{\frac{2}{3}}(x - y)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{(x - y)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} - xy - x^2 - y^2 = \frac{x^3 - y^3}{(x - y)} - xy - x^2 - y^2 = \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{(x - y)} - xy - x^2 - y^2$$

$$= x^2 + xy + y^2 - xy - x^2 - y^2 = 0 \text{ (2 точки)}.$$

Зад.2 Върхът (x_0, y_0) на параболата $y = -2x^2 + 4x + 1$ е с координати $x_0 = -\frac{b}{2a} = 1$ и $y_0 = y(1) = 3$.

Определяме $y(0) = 1$ - пресечна точка с ординатната ос, а от $-2x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$ -

пресечни точки с абсцисната ос. От $a = -2 < 0 \Rightarrow$ най-малката стойност b на функцията y в интервала $[-3; 0]$ е $b = y(-3) = -29$ (**1 точка**) и най-голямата стойност a на функцията y в интервала $[-3; 0]$ е $a = y(0) = 1$ (**1 точка**).

$$x + b + 28a \leq \frac{2x + 7}{x + 1} + \frac{x^2 - 4}{2 + x - x^2} \Leftrightarrow x - 1 \leq \frac{2x + 7}{x + 1} + \frac{x^2 - 4}{2 + x - x^2} \text{ (0,5 точки)}.$$

Дефиниционната област на неравенството е $x \neq -1, x \neq 2$ (**1 точка**).

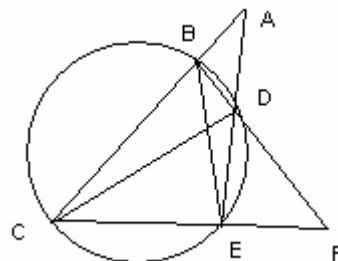
Преобразуваме неравенството и получаваме

$$x - 1 \leq \frac{2x + 7}{x + 1} + \frac{x^2 - 4}{2 + x - x^2} \Leftrightarrow x - 1 \leq \frac{2x + 7}{x + 1} - \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x + 1)} \Leftrightarrow \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x + 1)} \leq 0 \text{ (2 точки)}.$$

Следователно $x \in (-\infty, -2] \cup (-1, 2) \cup (2, 3]$ (**1,5 точки**).

Зад.3 а) $\angle EDF + \angle EDB = 180^\circ$ /съседни ъгли/ (**0,5 точки**) и $\angle BCE + \angle EDB = 180^\circ$ /CEDB-вписан/ (**1 точка**), откъдето $\angle EDF = \angle BCF$ (**0,5 точки**).

б) Триъгълниците ADC и ABE са подобни, защото имат общ ъгъл, а ъглите ACD и AEB се опират на хордата BD, т.е. $\angle ACD = \angle AEB$ (**1,5 точки**). Тогава $\frac{CD}{BE} = \frac{AC}{AE} = 2$ (**0,5 точки**).



Аналогично $\triangle BEF \sim \triangle CDF$ (**1,5 точки**), следователно $\frac{DF}{EF} = \frac{CD}{BE} = \frac{CF}{BF} = 2$ (**0,5 точки**), откъдето $DF = 2EF = 2$ (**1 точка**).

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

XI клас

Зад.1 Сумата от първите десет члена на аритметична прогресия е 140, а произведението на втория и деветия член е 147. Намерете прогресията.

(7 точки)

Зад.2 Трапецът ABCD ($AB \parallel CD$, $AB > CD$) е вписан в окръжност с радиус R .

а) Докажете, че ако в трапеца може да се впише окръжност, то малката основа, височината и голямата основа са последователни членове на геометрична прогресия.

б) Намерете малката основа, бедрото и лицето на трапеца, ако голямата основа AB служи за диаметър на описаната окръжност и $\angle ACD = \alpha$.

(7 точки)

Зад.3 Геометричната прогресия $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ е с положителни членове и частно q , а аритметичната прогресия $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ е растяща с разлика d . При какво условие уравненията

$b_1 + \log_{\sqrt[q]{y}} a_n = b_n + \log_{\sqrt[q]{y}} a_1$ и $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{2^{n-1}} + \dots = \frac{1}{2}$ ще бъдат еквивалентни?

(7 точки)

Време за работа-4,5 часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

Указание за проверка

XI клас

Зад.1 Съгласно условието на задачата $\begin{cases} 2a_1 + 9d = 28 \\ (a_1 + d)(a_1 + 8d) = 147 \end{cases}$ **(2точки)**, откъдето
 $\left(\frac{28-7d}{2}\right)\left(\frac{28+7d}{2}\right) = 147$ **(1точка)** $\Rightarrow d = \pm 2$ **(2точки)** $\Rightarrow a_1 = 5$ или $a_1 = 23$ **(2точки)**. Прогресията е 5,7,9,... или 23,21,19,....

Зад.2 а) Щом трапецът е вписан в окръжността, то той е равнобедрен, т.е. $BC=AD$ **(1точка)**. Ако трапецът е описан около окръжност, то $AB+CD=BC+AD=2AD$ **(1точка)**. Ако DH е височината на трапеца, то $DH^2 = AD^2 - AH^2 = \left(\frac{AB+CD}{2}\right)^2 - \left(\frac{AB-CD}{2}\right)^2 = AB \cdot CD$, с което твърдението е доказано **(1точка)**.

б) Тъй като $\angle ACD = \alpha$, то $\widehat{AD} = \widehat{BC} = 2\alpha \Rightarrow \widehat{CD} = 180^\circ - 4\alpha \Rightarrow \angle DAC = 90^\circ - 2\alpha$ **(1точка)**.

От синусова теорема намираме $CD = 2R \sin(90^\circ - 2\alpha) = 2R \cos 2\alpha$ и $AD = 2R \sin \alpha$ **(1точка)**.

$$\begin{aligned} \Rightarrow DH^2 &= AD^2 - \left(\frac{AB-CD}{2}\right)^2 = 4R^2 \sin^2 \alpha - R^2(1 - \cos 2\alpha)^2 = 4R^2 \sin^2 \alpha - 4R^2 \sin^4 \alpha = R^2 \sin^2 2\alpha \\ \Rightarrow DH &= R \sin 2\alpha \text{ **(1точка)**} \\ \Rightarrow S_{ABCD} &= \frac{(AB+CD) \cdot DH}{2} = 2R^2 \cos^2 \alpha \sin 2\alpha \text{ **(1точка)**.} \end{aligned}$$

Зад.3 Уравнението (1) $b_1 + \log_{\sqrt[n]{y}} a_n = b_n + \log_{\sqrt[n]{y}} a_1$ има смисъл при $y > 0, y \neq 1$ **(1точка)**. Извършваме

преобразувания и получаваме $b_1 + \log_{\sqrt[n]{y}} a_n = b_n + \log_{\sqrt[n]{y}} a_1 \Leftrightarrow \log_{\sqrt[n]{y}} \frac{a_n}{a_1} = b_n - b_1 \Leftrightarrow$

$$(\sqrt[n]{y})^{b_n - b_1} = \frac{a_n}{a_1} \Leftrightarrow y = \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\frac{d}{b_n - b_1}} = \left(\frac{a_1 q^{n-1}}{a_1}\right)^{\frac{d}{b_1 + (n-1)d - b_1}} = q^{\frac{(n-1)d}{(n-1)d}} = q \text{ **(1точка)**.}$$

Тъй като $q > 0$ и $q \neq 1$, то $y = q$ е единственото решение на уравнението **(1точка)**.

Лявата страна на уравнението (2) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{2^{n-1}} + \dots = \frac{1}{2}$ е сума на безкрайната геометрична прогресия $x, -\frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{4}, -\frac{x^4}{8}, \dots, (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{2^{n-1}}, \dots$ с първи член x и частно

$$-\frac{x^2}{2} = -\frac{x}{2} \text{ **(1точка)**. Ако } \left| -\frac{x}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow x \in (-2; 2), \text{ то сумата } S = \frac{x}{1 - (-\frac{x}{2})} \text{ **(1точка)**.}$$

$$\text{Уравнението } x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{2^{n-1}} + \dots = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x}{2+x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \in (-2; 2) \text{ **(1точка)**.}$$

Следователно уравненията (1) и (2) ще бъдат еквивалентни, ако $q = \frac{2}{3}$ **(1точка)**.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

XII клас

Зад.1 Околният ръб на наклонена триъгълна призма е 4 см. Страните на перпендикулярното на този ръб сечение се отнасят така, както 9:10:17, а лицето му е 144 cm^2 . Намерете лицето на околната повърхнина на призмата.

(7 точки)

Зад.2 В правоъгълния $\triangle ABC$ точката М е средата на медианата към хипотенузата АВ. От М са спуснати перпендикулярите МХ, МУ и МZ към ВС, АС и АВ ($X \in BC, Y \in AC, Z \in AB$). Ако лицето на $\triangle ABC$ е S, то да се изрази лицето на $\triangle XYZ$ чрез S.

(7 точки)

Зад.3 Даден е изразът $M = \frac{\frac{\sqrt{4a^2 - 4a + 1}}{a} + a\sqrt{4a^2 - 4a + 1} + 4 - \frac{2}{a}}{\sqrt{4a - 4 + \frac{1}{a}}}$.

а) Да се опрости М

б) Да се пресметне числената стойност на М, ако a е най-големият от корените на уравнението $(2x^2 - x - 6)^2 + (2x^2 + x - 6)^2 = 4x^2$.

(7 точки)

Време за работа-4,5 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

Указание за проверка

XII клас

Зад.1 Нека страните на перпендикулярното сечение са $a=9x$, $b=10x$ и $c=17x$ (**0,5 точки**), откъдето полупериметъра $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9x+10x+17x}{2} = 18x$ (**1 точка**). Лицето на сечението е

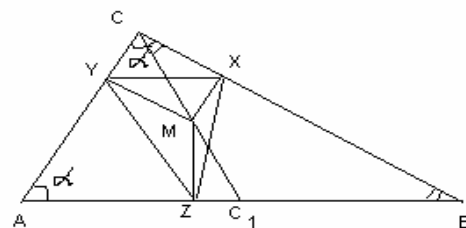
$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18x \cdot 9x \cdot 8x \cdot x} = 144 \Rightarrow x = 2 \text{ (1 точка)}.$$

Намиране страните a , b и c на перпендикулярното на наклонения ръб l сечение-18 см, 20 см и 34см (**1,5 точки**). От $l \perp (ABC) \Rightarrow l \perp AB, l \perp AC$ и $l \perp BC$ (**1,5 точки**).

Лицето на околната повърхнина на призмата е сбор от лицата на три успоредника:
 $S = l \cdot AB + l \cdot AC + l \cdot BC = l \cdot (a+b+c) = 4 \cdot 72 = 288 \text{ см}^2$ (**1,5 точки**).

Зад.2 Нека CC_1 -медиана към хипотенузата AB , M -среда на CC_1 и $CM = MC_1 = m$. Знаем, че $AC_1 = BC_1 = CC_1 \Rightarrow AB = 4m$ и ако $\angle CAB = \angle ACC_1 = \alpha$, то $\angle ABC = \angle BCC_1 = 90^\circ - \alpha$ (**0,5 точка**).

От правоъгълните триъгълници MXC , MYC и MZC_1 , следва че $MX = m \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = m \cdot \cos \alpha$, $MY = m \cdot \sin \alpha$ и $MZ = m \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) = m \cdot \sin 2\alpha$ (**1,5 точки**).



$$\Rightarrow S_{\Delta XYZ} = S_{\Delta MXY} + S_{\Delta MYZ} + S_{\Delta MXZ} = \frac{1}{2} MX \cdot MY \sin 90^\circ + \frac{1}{2} MY \cdot MZ \sin(180^\circ - \alpha) + \frac{1}{2} MX \cdot MZ \sin(90^\circ + \alpha)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta XYZ} = \frac{1}{2} (MX \cdot MY + MY \cdot MZ \sin \alpha + MX \cdot MZ \cos \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} (m^2 \sin \alpha \cos \alpha + m^2 \sin^2 \alpha \sin 2\alpha + m^2 \cos^2 \alpha \sin 2\alpha) = \frac{1}{2} m^2 (\sin \alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} m^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha + \sin 2\alpha \right) = \frac{3}{4} m^2 \sin 2\alpha \text{ (2,5 точки)}.$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4m \sin \alpha \cdot 4m \cos \alpha = 8m^2 \sin \alpha \cos \alpha = 4m^2 \sin 2\alpha \text{ (2 точки)} \Rightarrow S_{\Delta XYZ} = \frac{3}{16} S \text{ (0,5 точки)}.$$

Зад.3 а) Допустимите стойности на променливата са $a > 0$, $a \neq \frac{1}{2}$ (**0,5 точки**).

$$M = \frac{\sqrt{(2a-1)^2}}{a} + a\sqrt{(2a-1)^2} + \frac{2(2a-1)}{a} \Leftrightarrow M = \frac{|2a-1|}{a} + a|2a-1| + \frac{2(2a-1)}{a} \Leftrightarrow$$

$$M = \frac{\sqrt{(2a-1)^2}}{a} \Leftrightarrow M = \frac{|2a-1|}{\sqrt{a}}$$

$$M = \frac{\frac{1+a^2}{a}|2a-1| + \frac{2(2a-1)}{a}}{\sqrt{a}} \Leftrightarrow M = \frac{(1+a^2)|2a-1| + 2(2a-1)}{\sqrt{a}|2a-1|} \Leftrightarrow M = \frac{1+a^2}{\sqrt{a}} + \frac{2(2a-1)}{\sqrt{a}|2a-1|} \text{ (2,5 точки)}$$

$$\Rightarrow M = \frac{a^2-1}{\sqrt{a}} \text{ за } a \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \text{ и } M = \frac{a^2+3}{\sqrt{a}} \text{ за } a \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right) \text{ (1 точка)}.$$

$$\text{б) } (2x^2 - x - 6)^2 + (2x^2 + x - 6)^2 = 4x^2 \Leftrightarrow ((2x^2 - 6) - x)^2 + ((2x^2 - 6) + x)^2 = 4x^2$$

$$\Leftrightarrow 2(2x^2 - 6)^2 + 2x^2 = 4x^2 \Leftrightarrow (2x^2 - 6)^2 + x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow 4x^4 - 25x^2 + 36 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2 ;$$

$$x_{3,4} = \pm \frac{3}{2} \text{ (2 точки)} \Rightarrow a = 2 \text{ и от } 2 \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \Rightarrow M = \frac{a^2+3}{\sqrt{a}} = \frac{4+3}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \text{ (1 точка)}.$$