

54. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

НАЦИОНАЛЕН КРЪГ

Задача 1. Да се намерят всички тройки от естествени числа (x, y, z) такива, че

$$\sqrt{\frac{2005}{x+y}} + \sqrt{\frac{2005}{x+z}} + \sqrt{\frac{2005}{y+z}}$$

е естествено число.

Решение. Първо ще докажем, че ако p, q и r са рационални числа и $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ е рационално число, то всяко от числата $\sqrt{p}, \sqrt{q}$ и $\sqrt{r}$ е рационално. Нека $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = s$, където $pqr \neq 0$ и s е рационално число. Тогава $\sqrt{p} + \sqrt{q} = s - \sqrt{r}$ и след повдигане на квадрат получаваме $p + q + 2\sqrt{pq} = s^2 + r - 2s\sqrt{r}$. Записваме това равенство във вида $2\sqrt{pq} = s^2 + r - p - q - 2s\sqrt{r}$ и отново повдигаме на втора степен. Получаваме $4pq = M^2 + 4s^2r - 4Ms\sqrt{r}$, където $M = s^2 + r - p - q > 0$, откъдето следва, че $\sqrt{r}$ е рационално число. Аналогично доказваме, че $\sqrt{p}$ и $\sqrt{q}$ са рационални числа.

Нека естествените числа x, y, z имат исканото свойство. Тогава $\sqrt{\frac{2005}{x+y}}, \sqrt{\frac{2005}{x+z}}$ и $\sqrt{\frac{2005}{y+z}}$ са рационални числа. Ако $\sqrt{\frac{2005}{x+y}} = \frac{a}{b}$, където a и b са взаимнопрости, то $2005.b^2 = (x+y)a^2$.

Оттук следва, че a^2 дели 2005, което е възможно само ако $a = 1$. Следователно $x + y = 2005.b^2$. Аналогично $x + z = 2005.c^2$ и $y + z = 2005.d^2$. Тогава

$$\sqrt{\frac{2005}{x+y}} + \sqrt{\frac{2005}{x+z}} + \sqrt{\frac{2005}{y+z}} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

е естествено число. Тъй като b, c и d са естествени числа имаме, че $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \leq 3$. Ако $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 3$, то $b = c = d = 1$ системата $x + y = 2005$, $x + z = 2005$ и $y + z = 2005$ няма решение в естествени числа.

Ако $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 2$, то едно от числата b, c, d е равно на 1, а останалите две са равни на 2 и системата за x, y и z няма решение в естествени числа.

Остава да разгледаме случая $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$. Без ограничение предполагаме, че $b \geq c \geq d$, като е ясно, че $d > 1$. Ако $d > 3$, то дадената сума е по-малка от 1. Следователно $d = 2$ или 3. При $d = 3$ получаваме $b = c = 3$, а при $d = 2$ имаме $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$, което има две решения $b = 3, c = 6$ и $b = c = 4$. Директно се проверява, че само при $d = 2, b = c = 4$ системата има решение в естествени числа и то е: $x = 14.2005, y = z = 2.2005$. Следователно решенията на задачата са всички тройки от числа (x, y, z) , две от които са равни на 2.2005, а третото е равно на 14.2005.

Задача 2. Окръжности k_1 и k_2 се допират външно в точка T . Права пресича k_1 в точки A и B и се допира до k_2 в точка X . Правата XT пресича k_1 в точка S и върху дъгата TS ,

несъдържаща A и B , е избрана точка C . Нека CY е допирателната към k_2 ($Y \in k_2$), за която отсечката CY не пресича отсечката ST . Ако I е пресечната точка на правите XY и SC , да се докаже, че:

а) точките C , T , Y и I лежат на една окръжност;

б) точка I е център на външновписаната окръжност за $\triangle ABC$ към страната BC .

Решение. а) Понеже k_1 и k_2 се допират, имаме $\angle BXT = \frac{\widehat{XT}}{2} = \frac{\widehat{TS}}{2} = \angle TAS$. Оттук лесно следва, че S е среда на дъгата $\widehat{AB}$. Тогава $\angle TCI = \angle TAS$ (защото $ATCS$ е вписан в k_1), $\angle TAS = \angle BXT$, $\angle BXT = \angle TYX$ (защото се измерват с една и съща дъга). Следователно $\angle TCI = \angle TYI$, което означава, че около $CTIY$ може да се опише окръжност.

б) Тъй като $\angle AXS = \angle TAS$, получаваме че $\triangle AXS \sim \triangle TAS$. Оттук намираме $SA^2 = ST \cdot SX$. От а) имаме $\angle CIT = \angle CYT = \angle TXY$ и следователно $\triangle SXI \sim \triangle SIT$. Оттук намираме $SI^2 = ST \cdot SX$. Окончателно получихме $SA = SI$. Освен това от

$$\angle BCI = 180^\circ - \angle BCS = 180^\circ - \left(\gamma + \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 90^\circ - \frac{\gamma}{2},$$

следва, че CI е външна ъглополовяща на $\angle ACB$. Остава да забележим, че $SB = SA = SI$ и от равнобедрения $\triangle BSI$ с $\angle BSI = \angle BSC = \alpha$ намираме $\angle BIS = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Сега от $\triangle BCI$ намираме $\angle CBI = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, което означава, че BI е външна ъглополовяща на $\angle ABC$. Следователно I е центърът на външновписаната окръжност за триъгълник ABC към страната BC .

Задача 3. Нека M е множеството на рационалните числа в интервала $(0, 1)$. Съществува ли подмножество A на M такова, че всяко число от M може да се представи по единствен начин като сума на едно или краен брой различни числа от A ?

Решение. Ще докажем, че такова множество не съществува. Да допуснем противното. Нека $a \in A$ и да допуснем, че съществува $a' \in A$ и $a' > \frac{a}{2}$. Тогава числото $a - a' < \frac{a}{2}$ може да се представи като сума на едно или краен брой различни числа от A . Тъй като всяко от тези числа е по-малко от $\frac{a}{2}$, то числото $a = a' + a - a'$ се представя по два различни начина (веднъж като a и втори път като a' плюс числата от представянето на $a - a'$) като сума на едно или няколко различни числа от A , противоречие. Следователно ако $a \in A$, то

$A \cap \left(\frac{a}{2}, a\right) = \emptyset$. В частност във всеки интервал $\left[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}}\right)$, $i = 1, 2, \dots$ има най-много един елемент на A . Тъй като A е безкрайно (в противен случай като сума на различни числа от A могат да се получат краен брой числа, а рационалните числа в интервала $(0, 1)$ са безкрайно много), оттук лесно следва, че числата от A могат да се подредят в безкрайна редица $a_1, a_2, \dots$, като $a_i \geq 2a_{i+1}$ за всяко i . Ако за някое i неравенството е строго, то

$$s = \sum_{i=2}^{\infty} a_i < \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_1}{2^{i-1}} = a_1.$$

Това означава, че числата от интервала (s, a_1) не могат да се представят като сума на различни числа от A . Следователно $a_{i+1} = \frac{a_1}{2^i}$ за всяко i . Тогава лесно се съобразява, че само числата от вида $a_1 \frac{m}{2^n}$ могат да се представят като сума на едно или краен брой числа от A . Тъй като всяко рационално число с нечетен знаменател, който е взаимнопрост със знаменателя на a_1 , не може да се представи в дадения вид, получаваме противоречие, с което задачата е решена.

Задача 4. Нека $\triangle A'B'C$ е образ на $\triangle ABC$ при ротация с център C . Точките M , E и F са средите съответно на отсечките BA' , AC и $B'C$. Ако $AC \neq BC$ и $EM = FM$, да се намери $\angle EMF$.

Решение. Нека $a = BC = B'C$, $b = AC = A'C$, $c = AB = A'B'$, $\gamma = \angle C$. Понеже $\triangle AA'C \sim \triangle BB'C$ по втори признак, имаме $AA' : AC = BB' : BC = k$. Следователно $AA' = kb$, $BB' = ka$.

Отсечките EM и FM могат да се изразят, като се използва формулата за медиана в триъгълник, или директно чрез формулата на Ойлер за разстоянието между средите на диагоналите на четириъгълник (напомняме, че тя е валидна и за неизпъкнал, дори за самопресичащ се четириъгълник):

$$4EM^2 = k^2b^2 + c^2 + b^2 + a^2 - A'B^2 - b^2,$$

$$4FM^2 = k^2a^2 + c^2 + b^2 + a^2 - A'B^2 - a^2.$$

Условието $EM = FM$ е равносилно с $(k^2 - 1)(a^2 - b^2) = 0$, а оттам и с $k = 1$, понеже $a \neq b$. Това е в сила точно когато $\triangle AA'C$ е равнобедрен, т.е. при ротация на $\pm 60^\circ$. Ще разгледаме

само случая на положително ориентиран $\triangle ABC$ и ъгъл на ротация 60° ; останалите са аналогични. От $\triangle CBA'$ имаме

$$A'B^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(60^\circ - \gamma),$$

а от $\triangle AB'C$ получаваме

$$4EF^2 = B'A^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(60^\circ + \gamma).$$

Ще докажем, че $EF = EM$. Като използваме изразяванията на двете отсечки, намираме че $EF = EM$ е равносилно на:

$$c^2 + 2ab \cos(60^\circ - \gamma) = a^2 + b^2 - 2ab \cos(60^\circ + \gamma),$$

откъдето поради $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos \gamma$ получаваме:

$$2ab \cos(60^\circ - \gamma) + 2ab \cos(60^\circ + \gamma) = 2ab \cos \gamma.$$

Това равенство е еквивалентно на $2 \cos 60^\circ \cos \gamma = \cos \gamma$, което е вярно. Следователно $EF = EM$ и значи $\angle EMF = 60^\circ$.

Задача 5. Ако t , a и b са положителни цели числа, то (t, a, b) -игра наричаме следната игра между двама: първият заменя t с едно от числата $t - a$ или $t - b$, след това вторият заменя полученото число, като изважда от него a или b , след това отново първият изважда a или b от числото, получено от втория и т.н. Губи този, който пръв получи отрицателно число. Да се докаже, че съществуват безбройно много t , така че първият играч има печеливша стратегия за (t, a, b) -игра за всички a и b със сума 2005.

Решение. Първо ще докажем, че ако (t, a, b) -игра е печеливша за някой от двамата, то $(t + a + b, a, b)$ -игра е печеливша за същия играч. Да означим първият играч с A , а вторият с B . Нека B има печеливша стратегия за (t, a, b) -игра. При $(t + a + b, a, b)$ -игра след ход на A се получава $(t + a, a, b)$ -игра или $(t + b, a, b)$ -игра, като на ход е B . И в двата случая B може да получи (t, a, b) -игра, при която той отново е втори и следователно ще спечели.

Нека A има печеливша стратегия за (t, a, b) -игра. Тъй като A може да получи $(t - a, a, b)$ или $(t - b, a, b)$ -игра, при която той е втори, то следва, че или $(t - a, a, b)$, или $(t - b, a, b)$ -игра е печеливша за играещия втори. Без ограничение нека това е $(t - a, a, b)$. От доказаното по-горе следва, че $(t - a + a + b, a, b) = (t + b, a, b)$ -игра е печеливша за играещия втори. Понеже от $(t + a + b, a, b)$ -игра A може да получи $(t + b, a, b)$ -игра, в която той е втори, то $(t + a + b, a, b)$ -игра е печеливша за A .

Ще докажем, че при $t = 2004$ и $a + b = 2005$ първият играч A има печеливша стратегия. Без ограничение $a \leq b$. Тъй като $a > 0$, то $2004 \geq b$. За да спечели A трябва да извади от $t = 2004$ числото b . Тогава остава числото $2004 - b$, което поради $a + b = 2005$ е по-малко от a . Това означава, че при всеки ход на B ще се получи отрицателно число. Сега от доказаното по-горе следва, че за всяко s при $t = 2004 + s2005$ и $a + b = 2005$ играта (t, a, b) е печеливша за A .

Задача 6. Нека a , b и c са естествени числа такива, че ab дели $c(c^2 - c + 1)$ и $a + b$ се дели на $c^2 + 1$. Да се докаже, че множествата $\{a, b\}$ и $\{c, c^2 - c + 1\}$ съвпадат.

Решение. Първо ще докажем, че ако x, y и n са естествени числа, за които $\frac{xy}{x+y} > n$, то

$$\frac{xy}{x+y} \geq n + \frac{1}{n^2 + 2n + 2}.$$

Понеже $xy > n(x+y)$, то $xy = n(x+y) + r$, където r е естествено число. Записваме горното равенство във вида $(x-n)(y-n) = n^2 + r$, откъдето следва $x > n$ и $y > n$. Оттук $x = n + d_1$ и $y = n + d_2$ и $d_1 d_2 = n^2 + r$. Тогава като използваме неравенството $\frac{r}{A+r} \geq \frac{1}{A+1}$, което е вярно при $A > 0$ и $r \geq 1$ и свойството, че ако $d_1 d_2 = n^2 + r$, то $d_1 + d_2 \leq 1 + n^2 + r$, намираме:

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{n^2 + d_1 d_2 + n(d_1 + d_2)}{2n + d_1 + d_2} = n + \frac{r}{2n + d_1 + d_2} \geq n + \frac{r}{2n + n^2 + 1 + r} \geq n + \frac{1}{n^2 + 2n + 1}.$$

Равенство имаме точно когато $\{x, y\} = \{n+1, n^2 + n + 1\}$.

От условието следва, че $c(c^2 - c + 1) = pab$ и $a + b = q(c^2 + 1)$, където p и q са естествени числа. Следователно

$$\frac{c(c^2 - c + 1)}{c^2 + 1} = \frac{pqab}{a+b} = \frac{xy}{x+y}$$

за $x = pqa$ и $y = pqb$. Тогава $\frac{xy}{x+y} = c - \frac{c^2}{c^2 + 1} = c - 1 + \frac{1}{c^2 + 1}$. Следователно $\frac{xy}{x+y} > c - 1$

и съгласно доказаното свойство $\frac{xy}{x+y} \geq c - 1 + \frac{1}{(c-1)^2 + 2(c-1) + 2} = c - 1 + \frac{1}{c^2 + 1}$.

Следователно имаме случай на равенство, което означава, че $\{x, y\} = \{c, c^2 - c + 1\}$. Тъй като c и $c^2 - c + 1$ са взаимнопрости, то от $x = pqa$ и $y = pqb$ следва, че $p = q = 1$. Окончателно получаваме $\{a, b\} = \{c, c^2 - c + 1\}$.

Задачите са предложени от: 1 – Олег Мушкаров, 2 – Стоян Атанасов, 3 – Николай Николов, 4 – Ивайло Кортезов, 5 – Емил Колев, 6 – Александър Иванов.