

ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

ВАРНА

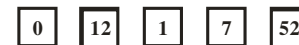
7 – 8 февруари 2009 г.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

4 – 8 КЛАС

Тема за 4 клас

Задача 1. Върху петте картички са написани числа. Наредете петте картички една след друга така, че да се получи възможно най-голямото число. Наредете петте картички една след друга така, че да се получи възможно най-малкото число. Намерете разликата на двете получени числа.



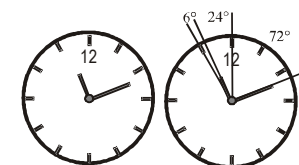
Решение: Най-голямото число, което може да се получи след нареждане на картичките, е 7 521 210 (**2 т.**), а най-малкото е 1 012 527 (**2 т.**). Разликата на двете числа е 6 508 683 (**2 т.**).

Задача 2. За 1 минута минутната стрелка на часовник се завърта на 6° , а за 2 минути часовата стрелка се завърта на 1° .

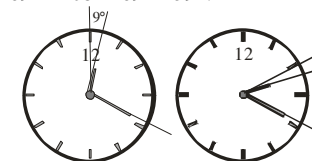
а) На колко градуса е равен ъгълът между часовата и минутната стрелка в 11 часа и 12 минути?

б) Посочете пример, в който ъгълът между часовата и минутната стрелка е равен на 99° и пример, в който ъгълът между часовата и минутната стрелка е равен на 39° .

Решение: а) (**3 т.**) В 11 часа часовата стрелка сочи към 11, а минутната към 12. За 12 минути минутната стрелка се завърта на $12 \cdot 6^\circ = 72^\circ$ (**1 т.**). За 12 минути часовата стрелка се завърта на шест пъти повече градуса, отколкото за 2 минути, т.е. на $1^\circ \cdot 6 = 6^\circ$ (**1 т.**). (Оставащата **1 т.** е за довършване на решението.) А за един час (интересува ни ъгълът от 11 часа до 12 часа) часовата стрелка се завърта на 30° . Тъй като $30^\circ - 6^\circ = 24^\circ$, търсеният ъгъл е равен на $24^\circ + 72^\circ = 96^\circ$.



б) (**3 т.**) (**2 т.** за един верен отговор независимо от обосновките и **1 т.** за втория верен отговор) В 12 часа и 18 минути, защото $18 \cdot 6^\circ - 9^\circ = 108^\circ - 9^\circ = 99^\circ$ и в 14 часа и 18 минути, защото $18 \cdot 6^\circ - 69^\circ = 108^\circ - 69^\circ = 39^\circ$.



Задача 3. Правоъгълник 3×2 е съставен от единични квадратчета, които са бели или черни, както е показано на фигурата.

а) Пребройте правоъгълниците от фигурата.

б) Пребройте правоъгълниците, в които черните единични квадратчета са повече от белите.

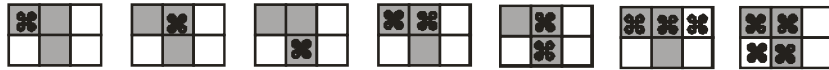


в) Сменете цвета на едно единично квадратче така, че броят на правоъгълниците, в които черните единични квадратчета са колкото белите, е възможно най-голям.

Забележка. Квадратът е частен случай на правоъгълник.

Решение а) (2 т.) В правоъгълника 3×2 има 6 единични квадратчета, 7 правоъгълника 2×1 , 2 правоъгълника 3×1 , 2 квадрата 2×2 и 1 правоъгълник 2×3 . Общият брой е $6+7+2+2+1=18$. (За изпускане на 1 случай се отнема 1 т.; присъждане на 1 т. за поне два верни случая.)

б) (2 т.) Трите черни единични квадрата изпълняват условието на задачата, защото в този случай броят на белите квадратчета е равен на нула. Това е в сила и за два от правоъгълниците 2×1 , които са изцяло черни. В един от правоъгълниците 3×1 две от трите единични квадратчета са черни. В един от квадратите 2×2 три от четирите единични квадратчета са също черни. Търсеният брой е $3+2+1+1=7$. (За изпускане на 1 случай се отнема 1 т.; присъждане на 1 т. за поне два верни случая.)



в) (3 т.) Ако някой от правоъгълниците съдържа равен брой черни и бели единични квадратчета, то той е съставен от четен брой единични квадратчета. Затова е достатъчно да наблюдаваме само правоъгълниците с четен брой единични квадратчета, т.е. 7-те правоъгълника 2×1 и 2-та квадрата 2×2 (правоъгълникът 2×3 също съдържа четен брой единични квадратчета, но при произволна промяна той няма да изпълнява исканото условие). (За съображенията дотук се присъжда 1 т.) В първоначалното оцветяване 5 от тези правоъгълници изпълняват условието (4 от първия вид и 1 от втория). Промяна на цвета на кое да е от белите квадратчета води до намаляване с 2 броя на правоъгълниците от първия вид и не увеличава правоъгълниците от втория вид. Тъй като се интересуваме от промяна, която води до възможно най-голям правоъгълници с исканото свойство, заключаваме, че промяна трябва да се извърши с черно квадратче. В два от трите случая получаваме 6 правоъгълника с исканото свойство. В първия случай е променен цветът на горното ляво квадратче, в резултат на което се получават следните 6 правоъгълника:



Във втория случай е променен цветът на горното средно квадратче, при което се получават следните 6 правоъгълника с исканото свойство:



(Оценката от 3 т. се разпределя така: 2 т. за посочване на пример, в който 6 от правоъгълниците са с исканото свойство и 1 т. за обосновка, че не може да се смени цветът на някое квадратче, при което броят на правоъгълниците с исканото свойство да стане по-голям от 6. Без конкретен пример, но при познат отговор 6 се присъжда 1 т.)

Задача 4. В две книжарници пуснали на разпродажба книги от десет различни заглавия – пет в едната книжарница и пет в другата. За всяка книжарница петте книги с различни заглавия били с различни цени в точен брой левове. Евгени влязъл в първата книжарница и купил по една книга от петте заглавия, забелязвайки, че двете най-евтини книги струват общо 14 лв., а двете най-скъпи – общо 22 лв. След това отишъл във втората книжарница, откъдето също купил по една книга от петте заглавия в нея. За трите най-евтини книги той заплатил общо 28 лв., а за трите най-скъпи – общо 37 лв. Намерете колко лева общо е похарчил Евгени в двете книжарници.

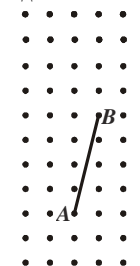
Решение: Ако третата по цена книга в първата книжарница струва по-малко от 9 лв. (т.е. най-много 8 лв.), то двете най-евтини книги в тази книжарница биха стрували не повече от $7+6=13$ лв., което е по-малко от 14 лв. и следователно не е възможно. Ако третата по цена книга струва повече от 9 лв. (т.е. поне 10 лв.), то двете най-скъпи книги биха стрували поне $11+12=23$ лв., което е повече от 22 лв. и следователно също не е възможно. Заключаваме, че третата по цена книга струва точно 9 лв. и в първата книжарница Евгени е заплатил $14+9+22=45$ лв. Една възможна реализация на цените на книгите в лева е: 6, 8, 9, 10 и 12. (Показването на пример, при който се реализира условието в задачата, е част е решението.) (За тази част общо 3 т. За доказателство само в едната посока 2 т. и 1 т. само за формулировка на твърдението, че третата по цена книга струва точно 9 лв., като точките не се събират.)

(За втората част на задачата общо 4 т. За доказателство само в едната посока 2 т. и 1 т. само за формулировка на твърдението, че третата по цена книга струва точно 11 лв., като точките отново не се събират.) Ако третата по цена книга във втората книжарница струва по-малко от 11 лв. (т.е. най-много 10 лв.), то трите най-евтини книги в тази книжарница биха стрували общо не повече от $10+9+8=27$ лв., което е по-малко от 28 и следователно не е възможно. Ако третата по цена книга струва повече от 11 лв. (т.е. поне 12 лв.), трите най-скъпи книги биха стрували поне $12+13+14=39$ лв., което е повече от 37 лв. и следователно също е невъзможно. Заключаваме, че третата по цена книга струва точно 11 лв. Тогава общата цена на двете най-евтини книги е $28-11=17$ лв. и във втората книжарница Евгени е заплатил $17+37=54$ лв. Една възможна реализация на цените в лева е: 7, 10, 11, 12 и 14. (И тук показването на пример е част от решението.)

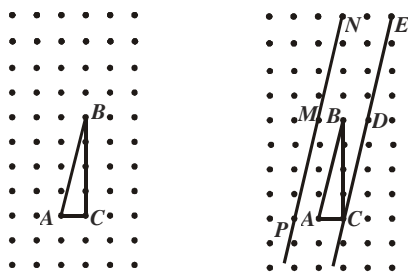
Общата стойност на покупките на Евгени е $45+54=99$ лв.

Тема за 5 клас

Задача 1. Дадените 66 точки са върхове на квадратчета със страна 1 см. Две от точките са означени с A и B . Колко от останалите 64 точки могат да се означат с C така, че лицето на триъгълника ABC да е 2 кв. см?



Решение: Една от търсените точки е показана на първата фигура. Дължината на страната BC е 4 см, а височината към тази страна е 1 см. Оттук следва, че лицето на $\triangle ABC$ е 2 кв. см. Остава да проверим кои от 66-те дадени точки са разположени върху прави, успоредни на AB и са на разстояние, равно на разстоянието от C до AB . Точката D от втората фигура е измежду търсените – $ACDB$ е успоредник. Аналогично и $ADEB$ е успоредник и следователно точката E е също измежду търсените. По подобен начин лицето на $\triangle ABM$ е 2 кв. см, а $ABMP$ и $ABNM$ са успоредници.



Отговорът на задачата е 6. (Получаването на всяка от шестте точки C, D, E, M, P и N се оценява с по 1 т. независимо от обосновките.)

Задача 2. Дадено е числото 560,7489. От него получите числото 20,09 с възможно най-малък брой пъти използване на следните действия:

- (1) деление на числото с 2;
- (2) изтриване на най-лявата или най-дясната цифра.

Решение: Да разгледаме цялата част на даденото число. Ако отстраним най-лявата цифра 5, ще получим 60 и оттук няма как да стигнем до 20. Затова трябва да разделим с 2 и ще получим 280. Нататък са възможни два варианта. При първия да отстраним най-лявата цифра 2. Получаваме 80 и сега задължително трябва два пъти подред да разделим на 2. Така стигаме до 20 чрез трикратно прилагане на операция (1) и еднократно прилагане на операция (2). При втория вариант да разделим с 2, при което получаваме 140. При по-нататъшно разделяне с 2 няма как да получим 20 и затова задължително трябва да отстраним най-лявата цифра 1. Остава още едно разделяне с 2. Заклучаваме, че и при втория вариант е необходимо трикратно прилагане на операция (1) и еднократно прилагане на операция (2). Трите разделяния с 2 намаляват дробната част на числото 8 пъти, при което се получава 0,09 и още поне 2 цифри след десетката. Заклучаваме, че са необходими още най-малко две отстранявания. Така, за крайното число 20,09 са необходими поне 6 прилагания на операциите (1) и (2). Ето 3 реализации с 6 операции:

$$560,7489 \xrightarrow{(2)} 560,748 \xrightarrow{(1)} 280,374 \xrightarrow{(1)} 140,187 \xrightarrow{(2)} 40,187 \xrightarrow{(2)} 40,18 \xrightarrow{(1)} 20,09,$$

$$560,7489 \xrightarrow{(2)} 560,748 \xrightarrow{(1)} 280,374 \xrightarrow{(1)} 140,187 \xrightarrow{(2)} 140,18 \xrightarrow{(2)} 40,18 \xrightarrow{(1)} 20,09,$$

$$560,7489 \xrightarrow{(2)} 560,748 \xrightarrow{(1)} 280,374 \xrightarrow{(2)} 80,374 \xrightarrow{(1)} 40,187 \xrightarrow{(2)} 40,18 \xrightarrow{(1)} 20,09.$$

За резултат с повече от 7 операции – общо 1 т.

За резултат със 7 операции – общо 2 т. Ето 3 възможни примера със 7 операции:

$$560,7489 \xrightarrow{(2)} 560,748 \xrightarrow{(2)} 560,74 \xrightarrow{(1)} 280,37 \xrightarrow{(2)} 80,37 \xrightarrow{(1)} 40,185 \xrightarrow{(2)} 40,18 \xrightarrow{(1)} 20,09,$$

$$560,7489 \xrightarrow{(2)} 560,748 \xrightarrow{(1)} 280,374 \xrightarrow{(2)} 280,37 \xrightarrow{(2)} 80,37 \xrightarrow{(1)} 40,185 \xrightarrow{(2)} 40,18 \xrightarrow{(1)} 20,09$$

$$560,7489 \xrightarrow{(2)} 560,748 \xrightarrow{(1)} 280,374 \xrightarrow{(2)} 80,374 \xrightarrow{(2)} 80,37 \xrightarrow{(1)} 40,185 \xrightarrow{(2)} 40,18 \xrightarrow{(1)} 20,09.$$

За резултат с 6 операции – общо 3 т., за обосновка, че 6 е минималният брой – 3 т.

Задача 3. Квадратна дъска със страна 2009 е разделена на единични квадратчета и четирите ъгливи квадратчета са изрязани. Пионка се намира в едно от оставащите квадратчета. За един ход тя преминава в съседно квадратче по хоризонтал или вертикал. Възможно ли е пионката да обходи всички квадратчета, преминавайки точно по веднъж през всяко от тях? Обосновете отговора си!

Решение: Преди изрязването на четирите ъгливи квадратчета да оцветим дъската шахматно (1 т.). Тъй като числото 2009 е нечетно, то четирите ъгливи квадратчета са едноцветни (още 1 т.). Освен това броят на оставащите квадратчета е нечетен, като тези с цвета на изрязаните са с 3 по-малко от останалите, т.е. разликата между броя на квадратчетата от единия цвят и броя на квадратчетата от другия цвят е равна на 3 (това съображение се оценява с 2 т.). От друга страна при преминаване от квадратче в квадратче се сменя цветът (това съображение се оценява с 2 т., като последната 1 т. се присъжда за завършване на решението) и следователно разликата между броя на квадратчетата от единия цвят и броя на квадратчетата от другия цвят е равна на 1. Стигаме до два несъвместими извода, което показва, че не е възможно пионката да обходи всички квадратчета, преминавайки точно по веднъж през всяко от тях.

Задача 4. Разполагаме с 16 еднакви карти, върху които е записано точно по едно от числата от 1 до 16. Двама играчи играят следната игра. Първият, скрито от втория, подрежда картите по свой избор в купчина една върху друга с лицето надолу. Вторият си избира едно трицифрено число и го съобщава на първия. Числото трябва да съдържа само цифрите 1, 2 и 3 без или с повторение. Първият играч започва да брои картите отгоре надолу и поставя всяка преброена карта най-отдолу в купчината. Когато стигне до картата, отговаряща на съобщеното число, той я обръща. Ако числото върху обрънатата карта е 13, печели вторият играч. В противен случай победител е първият играч. Възможно ли е първият играч да излиза винаги победител?

Решение: След като първият играч преброи до 16, подреждането на картите в купчината става същото като първоначалното. Изобщо, когато първият играч преброи до число, кратно на 16, подреждането на картите се възстановява. Следователно обрънатата карта е тази поред отгоре надолу в първоначалната купчина, колкото е остатъкът на съобщеното число при деление на 16. (За направените дотук разсъждения – общо 2 т.)

(За пълно решение до края – още 5 т. За частични резултати, независимо от техния брой, най-много 1 т.) Ще покажем, че измежду трицифрените числа, образувани от единици, двойки и тройки, нито едно не дава остатък 6 при деление на 16. Нека числото е $100a+10b+c$. Тъй като $100=96+4$ и 96 се дели на 16, то съществуването на a, b и c , за които числото $100a+10b+c$ дава остатък 6 при деление на 16 означава, че съществуват числа a, b, c и m , за които $4a+10b+c=16m+6$ при ограниченията за a, b и c от условието на задачата. Оттук следва, че $c=2$, защото числото вдясно на равенството е четно. Получаваме $4a+10b=16m+4$ и като разделим на 2, заклучаваме, че $b=2$. Следователно $2a+10=8m+2$. Отново разделяме на 2 и стигаме до равенството $a+5=4m+1$. Последното е невъзможно при нито една стойност на a ($a=1, 2$ или 3). Сега е достатъчно първият играч да подреди картите първоначално така, че картата с числото 13 върху нея да бъде шеста поред отгоре надолу в купчината.

Забележка. Разсъждения, аналогични на извършените, би трябвало да започват със случаите, когато остатъкът последователно е 0, 1, 2 и т.н., докато се стигне до 6. Тогава установяването на използваното по-горе свойство на трицифрените числа, образувани само с единици, двойки и тройки, става по естествен начин. За установяване на това свойство може да се използва и директна проверка на всички такива числа, които са общо 27 на брой. (За изследване на отделни случаи, независимо от техния брой, или само за формулирана хипотеза – 1 т.)

Тема за 6 клас

Задача 1. Подредете изразите по големина на стойностите им:

$$A = 3^{30} - 10^{15},$$

$$B = 4^{15} + |4^{15} - 3^{20}| - 3^{20},$$

$$C = 5^{-15} - 2^{-35},$$

$$D = 2^{-1} - 0, 2^{-1} + 0, 5^{-2}.$$

Решение:

$$A = 3^{30} - 10^{15} = 3^{2 \cdot 15} - 10^{15} = 9^{15} - 10^{15} < 0.$$

От $4^{15} - 3^{20} = 2^{3 \cdot 10} - 3^{2 \cdot 10} = 8^{10} - 9^{10} < 0$ следва, че $|4^{15} - 3^{20}| = 3^{20} - 4^{14}$ и следователно

$$B = 4^{15} + |4^{15} - 3^{20}| - 3^{20} = 0.$$

$$C = 5^{-15} - 2^{-35} = \frac{1}{5^{15}} - \frac{1}{2^{35}} = \frac{2^{7 \cdot 5} - 5^{3 \cdot 5}}{5^{15} \cdot 2^{35}} = \frac{128^5 - 125^5}{5^{15} \cdot 2^{35}} > 0.$$

$$D = 2^{-1} - 0, 2^{-1} + 0, 5^{-2} = \frac{1}{2} - 5 + 4 = -0,5. \text{ Лесно проверяваме, че } A < -1 < D.$$

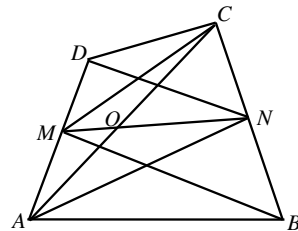
Отговор: $A < D < B < C$

Схема за оценяване: по 1 т. за вярно пресмятане на всеки от четирите израза и 2 т. за верен краен отговор.

Задача 2. Точките M и N са средите съответно на страните AD и BC на четириъгълника $ABCD$, а отсечката MN разполовява диагонала AC . Ако лицето на $\triangle BCM$ е 10 кв. см, да се намери лицето на $\triangle AND$.

Решение: Лицето на фигурата XYZ ще означаваме с S_{XYZ} , като лицата в решението са в квадратни сантиметри. Нека O е средата на диагонала AC .

Триъгълниците MBN и MNC имат една и съща височина съответно към равните страни BN и CN в тях. Следователно $S_{MBN} = S_{MNC}$. Заклучаваме, че $S_{MNC} = 5$. Ако означим $S_{MOC} = x$, то $S_{ONC} = 5 - x$. Триъгълниците AOM и MOC имат една и съща височина съответно към равните страни AO и CO в тях. Следователно $S_{AOM} = x$. По аналогичен начин заклучаваме, че $S_{ANO} = S_{ONC} = 5 - x$. Сумираме лицата на $\triangle AOM$ и $\triangle ANO$ и получаваме, че

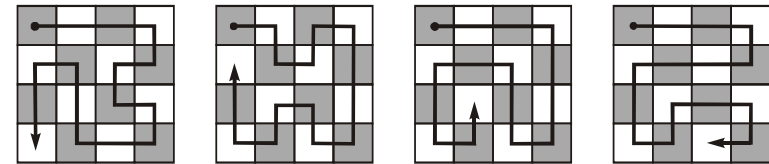


$S_{ANM} = x + 5 - x = 5$. Триъгълниците ANM и MND имат една и съща височина съответно към равните страни AM и DM в тях. Оттук $S_{AND} = 2S_{ANM} = 10$.

Схема на оценяване: 2 т. за $S_{MNC} = 5$; 1 т. за изразяване на S_{AOM} чрез S_{MOC} ; 1 т. за изразяване на S_{ANO} чрез S_{ONC} ; 1 т. за $S_{ANM} = 5$; 1 т. за $S_{AND} = 10$.

Задача 3. Полетата на шахматна дъска с n реда и n стълба, където $n \geq 3$, са оцветени по обичайния начин в черно и бяло. Пионка се намира в горното най-ляво поле, което е черно. За един ход тя преминава в съседно поле по хоризонтал или вертикал. Да се намери възможно най-малкото n , за което пионката може да достигне произволно бяло поле, преминавайки преди това точно по веднъж през всяко от останалите полета.

Решение: При преминаване от поле в поле се сменя цветът. Тъй като пионката тръгва от черно поле и трябва да обходи дъската, достигайки бяло поле, то това е възможно само ако броят на черните полета е равен на броя на белите (1 т.). При $n = 3$, черните полета са 5, а белите са 4 и следователно в този случай условието на задачата не може да се изпълни за нито едно бяло поле. Заклучаваме, че търсеното n трябва да е по-голямо от 3 (1 т.). В случая $n = 4$ е показано как се достига до 4 от белите полета. За достигане на



останалите бели полета е достатъчно да се използва симетричността относно черния диагонал на квадрата. (За посочване на маршрут, по който се достига кое да е бяло поле – по 1 т. за всеки маршрут, но не повече от 4 т., освен когато са изчерпани всичките 8 маршрути или е спомената симетричността, при което се присъжда оставащата 1 т.)

Задача 4. Възрастите на петима ученика от едно училище са различни цели числа. Сборът от годините на кои да е четирима от тях е не по-малък от 45, а сборът от годините на кои да е трима от тях не надминава 40. Намерете сбора от годините на петимата, ако той е съставно число.

Решение: Нека възрастите на петимата са a, b, c, d и e . Можем да считаме, че $a < b < c < d < e$. От условието следва, че (1) $a + b + c + d \geq 45$ и (2) $c + d + e \leq 40$. (За подреждане на петимата ученици според възрастта им и установяване на двете неравенства, съответно за сбора на **четиримата най-млади** и **тримата най-възрастни** – общо 1 т.). Ако $c \geq 13$, то $d \geq 14$ и от (2) следва, че $e \leq 13$, т.е. $e < d$, което е невъзможно. Заклучаваме, че $c \leq 12$ (1 т.). Ако $c \leq 11$, то $a + b \leq 9 + 10 = 19$ и от (1) следва, че $c + d \geq 26$. Оттук следват две неща: $d \geq 15$, защото $c \leq 11$ и $e \leq 14$, поради (2). Двете следствия не могат да бъдат изпълнени едновременно и следователно $c \geq 12$ (1 т.).

Докажем, че $c \leq 12$ и $c \geq 12$, което е възможно само ако $c = 12$. Ако $d \geq 14$, то $e \geq 15$ и тогава $c + d + e \geq 12 + 14 + 15 = 41$. Последното е несъвместимо с (2) и следователно $d = 13$ (1 т.). Заклучаваме още, че за e има само две възможности: $e = 14$ или $e = 15$ (1 т.). Тъй като $c + d = 25$, от (1) следва, че $a + b \geq 20$. От друга страна a и b са по-малки от 12 и следователно единствените възможности са: $a = 10, b = 11$ и $a = 9, b = 11$ (1 т.). Стигаме до следните 4 случая:

Първи случай: $a=9, b=11, c=12, d=13, e=14$ и $a+b+c+d+e=59$.

Втори случай: $a=9, b=11, c=12, d=13, e=15$ и $a+b+c+d+e=60$.

Трети случай: $a=10, b=11, c=12, d=13, e=14$ и $a+b+c+d+e=60$.

Четвърти случай: $a=10, b=11, c=12, d=13, e=15$ и $a+b+c+d+e=61$.

От получените стойности само 60 е съставно число, което е и отговорът на задачата (1 т.).

Забележка. За формулиране на отделни хипотези, включително и за познаване на крайния резултат – общо 1 т., т.е. при липса на доказателства независимо от наличието на правилни хипотези за отделните възрасти (броят на правилните хипотези е без значение) задачата се оценява най-много с 1 т.

Тема за 7 клас

Задача 1. Две яhti тръгват едновременно от двата противоположни бряга на река и се движат една срещу друга с постоянни (не задължително равни) скорости перпендикулярно на брега. Когато стигнат отсрещния бряг, яхтите се връщат незабавно назад. Първата среща на яхтите е на 630 m от един от бреговете, а втората среща е на обратния им път на 250 m от един от бреговете. Да се намери широчината на реката, ако течението се пренебрегва.

Решение: До първата среща една от яхтите (нека това е яхта 1) е изминала 630 m от брега, от който тя е тръгнала. Възможни са 2 случая.

Първи случай. Втората среща е на 250 m от другия бряг. Тогава до първата среща двете яhti изминават общо разстояние, равно на широчината на реката, а до втората среща – три пъти широчината на реката. Тъй като скоростите са постоянни, до втората среща всяка от яхтите изминава разстояние, три пъти по-голямо, отколкото до първата среща. До първата среща яхта 1 е изминала 630 m и следователно до втората среща тя е изминала общо $3 \cdot 630 = 1890$ m (2 т.). При това изминатото разстояние е с 250 m по-голямо от широчината на реката. Следователно търсената широчина е $1890 - 250 = 1640$ m (1 т.).

Втори случай. Втората среща е на 250 m от същия бряг. С аналогични на горните разсъждения получаваме, че яхта 1 е изминала до втората среща общо $3 \cdot 630 = 1890$ m (2 т.). Това разстояние е по-малко от удвоената широчина на реката с 250 m. Следователно търсената широчина е $\frac{1890 + 250}{2} = 1070$ m (1 т.).

Задача 2. Върху страните BC и AC вън от остроъгълния $\triangle ABC$ са построени квадратите $BCMN$ и $ACPQ$. Да се намери лицето на четириъгълника $ABMP$, ако $AM = 6$ cm.

Решение: Отговор 18 кв.см

Разглеждаме $\triangle AMC$ и $\triangle PBC$:

1) $AC = PC$ (страни в квадрата $ACPQ$);

2) $MC = BC$ (страни в квадрата $BCMN$);

3) $\angle ACM = \angle ACB + \angle BCM = \angle ACB + 90^\circ = \angle ACB + \angle ACP = \angle PCB$. Следователно двата триъгълника са еднакви по I признак. Оттук $AM = BP = 6$ cm. Освен това $\angle CAM = \angle CPB$, откъдето $\angle CAM + \angle CAP + \angle APB = \angle CPB + \angle CAP + \angle APB = 90^\circ$.

Получаваме, че $\angle AOP = 90^\circ$, където O е пресечната точка на AM и BP .

$$\begin{aligned} \text{Тогава } S_{ABMP} &= S_{BPA} + S_{BPM} = \\ &= \frac{1}{2} BP \cdot (AO + OM) = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} BP \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18 \text{ кв. см.}$$

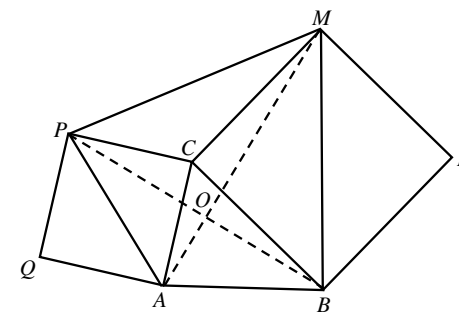


Схема на оценяване: 2 т. за доказване на $AM = BP = 6$ cm; 3 т. за доказване, че $AM \perp BP$; 1 т. за довършване на решението.

Задача 3. С $D(n)$ е означен броят на делителите на естественото число n , включително 1 и n . Да се намери най-малкото n , за което

$$3D(343n) - 2D(41n) = 3D(n).$$

Решение: Нека $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, където p_1, p_2, \dots, p_k са различни прости числа. Тогава $D(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$. Тъй като $343 = 7^3$ и 41 е просто число, да означим $n = 7^x \cdot 41^y \cdot m$, където $x \geq 0$ и $y \geq 0$, m е взаимно просто със 7 и 41. Имаме, че

$$D(343n) = D(7^{x+3} \cdot 41^y \cdot m) = (x+4)(y+1)D(m),$$

$$D(41n) = D(7^x \cdot 41^{y+1} \cdot m) = (x+1)(y+2)D(m) \text{ и } D(n) = D(7^x \cdot 41^y \cdot m) = (x+1)(y+1)D(m).$$

Сега условието от задачата става $3(xy + x + 4y + 4) - 2(xy + 2x + y + 2) = 3(xy + x + y + 1)$, откъдето $2xy + 4x = 7y + 5$. При $x=0$ и $x=1$ съответните y са отрицателни и следователно не са решения. От друга страна, ако $x \geq 4$, то $2xy + 4x \geq 8y + 16 > 7y + 5$ и заключаваме, че единствените възможности за x са $x=2$ и $x=3$. Съответните стойности на y са $y=1$ и $y=7$. Тъй като търсим най-малкото n , то трябва $x=2$, $y=1$ и $m=1$. Следователно отговорът на задачата е $n = 7^2 \cdot 41 = 2009$.

Второ решение: Да допуснем, че търсеното най-малко n има прост делител p , различен от 7 и 41. Нека $n = p^k n_1$, където p не дели n_1 . Тогава, ако всички делители на n , взаимно прости с p , са d_1, d_2, \dots, d_m , то делителите на n можем да разделим на $k+1$ групи с равен брой числа в тях, а именно:

$$(d_1, d_2, \dots, d_m), (pd_1, pd_2, \dots, pd_m), (p^2 d_1, p^2 d_2, \dots, p^2 d_m), \dots, (p^k d_1, p^k d_2, \dots, p^k d_m).$$

Това означава, че $D(n) = \frac{D(n_1)}{k+1}$. По същия начин пресмятаме, че $D(341n) = \frac{D(341n_1)}{k+1}$

и $D(41n) = \frac{D(41n_1)}{k+1}$. Но тогава n_1 също удовлетворява даденото равенство и е по-малко от n , което е невъзможно. Следователно разлагането на n на прости множители има вида $n = 7^x 41^y$, където $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Но тогава

$$D(n) = (x+1)(y+1), \quad D(41n) = (x+1)(y+2) \text{ и } D(343n) = (x+4)(y+1).$$

Даденото равенство придобива вида $3(x+4)(y+1) - 2(x+1)(y+2) = 3(x+1)(y+1)$ или $9(y+1) = 2(x+1)(y+2)$. Но $y+1$ и $y+2$ са последователни естествени числа и са взаимно прости, откъдето следва, че $y+2$ е делител на 9, по-голям от 1. Ето защо или $y+2=3$, или $y+2=9$. От първото равенство получаваме $y=1, x=2$, а от второто получаваме $y=7, x=3$. По-малката стойност на n се получава в първия случай и тя е $n = 7^2 \cdot 41 = 2009$.

Схема на оценяване: 5 т. за редуциране на задачата до $2xu + 4x = 7y + 5$ в първото решение или до $9(y+1) = 2(x+1)(y+2)$ във второто решение и 2 т. за завършване.

Задача 4. Полетата на шахматна дъска 8×8 са оцветени по обичайния начин в черно и бяло. За един ход най-напред Ани избира един ред и променя цвета на полетата в него (бяло \Leftrightarrow черно), а след това Боби избира една колона и променя цвета на полетата в нея (бяло \Leftrightarrow черно). След няколко хода броят на белите полета на дъската се оказал n . Да се определи възможно най-малката положителна стойност на n .

Решение: Ако Ани и Боби последователно променят редовете и колоните с четни номера, то от шахматното оцветяване може да се получи чисто черно оцветяване (разбира се и обратното). Следователно, ако определено оцветяване е постижимо от шахматното оцветяване, то е постижимо и от чисто черното оцветяване (и обратно). Ето защо, за улеснение на броенето ще приемем, че началното оцветяване е чисто черно. Нека a е броят на редовете, които са променени нечетен брой пъти, b е броят на колоните, които са променени нечетен брой пъти. С всеки ход всяко от числата a и b се променя с 1 и следователно те винаги са с еднаква четност. Тъй като началното оцветяване е чисто черно, то полетата, които стават бели, са променени нечетен брой пъти и $n = (8-a)b + (8-b)a = 8(a+b) - 2ab$. Заклучаваме, че n е четно, т.е. $n = 2k$ ($k = 1, 2, \dots, 32$). От $8(a+b) - 2ab = 2k$ намираме $4(a+b) - ab = k$. Последното равенство може да се запише във вида $(a-4)(b-4) = 16 - k$. Тъй като a и b приемат стойности от 0 до 8, то числата $a-4$ и $b-4$ са от интервала $[-4; 4]$. Търсим възможно най-малкото положително k и затова на k даваме последователно стойности 1, 2, 3 и т.н., като за $16 - k$ получаваме последователно стойностите 15, 14, 13 и т.н.. Първата стойност на $16 - k$, която може да се представи като произведение на две числа от $[-4; 4]$ с еднаква четност, е 9. Имаме $9 = 3 \cdot 3$ или $9 = (-3) \cdot (-3)$, като в първия случай $a = b = 7$, във втория – съответно $a = b = 1$. Получаваме, че първата възможност за $k > 0$ е $k = 7$, откъдето $n = 14$.

Забележка. Задачата може да се реши и с изчерпване на 41-те случая, съответстващи на различните стойности на a и b с еднаква четност. В показаната таблица редовете и стълбовете са номерирани с възможните стойности на a и b , а всеки от елементите на таблицата е броят на белите полета в съответния случай.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	16	32	48	64				
1	14	26	38	50					
2	16	24	32	40	48				
3	26	30	34	38					
4	32	32	32	32	32				
5	38	34	30	26					
6	48	40	32	24	16				
7	50	38	26	14					
8	64	48	32	16	0				

Схема на оценяване: 1 т. за прехода към чисто черно оцветяване, 1 т. за разсъжденията за четността на a и b , 1 т. за четността на броя на белите полета, 1 т. за пресмятането

на броя им, 1 т. за получаване на равенството $(a-4)(b-4) = 16 - k$, 1 т. за отхвърляне на случаите 15, 14, 13, 12, 11 и 10, 1 т. за намирането на крайния отговор.

Тема за 8 клас

Задача 1. Да се реши уравнението:

$$(x - \sqrt{3} - \sqrt{499})^2 + (x - \sqrt{3} + \sqrt{499})^2 + (x + \sqrt{3} - \sqrt{499})^2 + (x + \sqrt{3} + \sqrt{499})^2 = 2009.$$

Решение: Да означим $a = \sqrt{3}$ и $b = \sqrt{499}$. За лявата страна на уравнението последователно получаваме:

$$\begin{aligned} & (x - \sqrt{3} - \sqrt{499})^2 + (x - \sqrt{3} + \sqrt{499})^2 + (x + \sqrt{3} - \sqrt{499})^2 + (x + \sqrt{3} + \sqrt{499})^2 = \\ & = (x - a - b)^2 + (x - a + b)^2 + (x + a - b)^2 + (x + a + b)^2 = \\ & = x^2 - 2(a+b)x + (a+b)^2 + x^2 + 2(b-a)x + (a-b)^2 + x^2 + \\ & + 2(a-b)x + (a-b)^2 + x^2 + 2(a+b)x + (a+b)^2 = \\ & = 4x^2 + 2(a-b)^2 + 2(a+b)^2 = 4x^2 + 4a^2 + 4b^2. \end{aligned}$$

Отгук за даденото уравнение получаваме, че е еквивалентно на

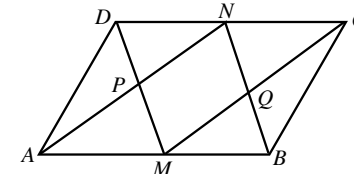
$$4x^2 + 2008 = 2009 \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Следователно даденото уравнение има два корена: числата $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$.

Схема на оценяване: 1 т. за правилно разкриване на поне една двойка скоби, по 1 т. за получаване на коефициентите (4, 0 и -1) на квадратното уравнение $4x^2 - 1 = 0$, по 1 т. за намиране на всеки от корените.

Задача 2. Точките M и N са съответно средите на страните AB и CD на четириъгълника $ABCD$. Отсечките AN и DM се пресичат в точката P , а отсечките CM и BN се пресичат в точката Q . Ако $PMQN$ е успоредник, да се докаже, че медицентровете на триъгълниците ABD , ABC , ACD и BCD са върхове на успоредник.

Решение: Първо ще докажем, че ако $PMQN$ е успоредник, то и $ABCD$ е успоредник. От $PM \parallel QN$ и това, че M е средата на AB , следва (съгласно теоремата за средната отсечка, приложена за $\triangle ANB$), че точката P е средата на AN . Аналогично Q е средата на CM . Сега от $PN = MQ$ следва, че $AN = CM$ и с помощта на условието $PN \parallel MQ$



заклучаваме, че $AMCN$ е успоредник. Отгук $AM \parallel NC$ и $AM = NC$ и следователно $ABCD$ също е успоредник. Нека G_1, G_2, G_3 и G_4 са съответно медицентровете на триъгълниците ABD , ABC , BCD и ACD .

(1) Нека $AC \cap BD = O$. Тогава $G_1 \in AC$ и $AG_1 : G_1O = 2:1$, откъдето $G_1O = \frac{1}{3}AC$.

Аналогично $G_2O = \frac{1}{3}BD$, $G_3O = \frac{1}{3}AC$ и $G_4O = \frac{1}{3}BD$. Получаваме, че в четириъгълника $G_1G_2G_3G_4$ диагоналите взаимно разполовяват и следователно той е успоредник.

(2) Ще докажем, че $G_1G_2G_3G_4$ е успоредник по друг начин. Тъй като $S_{ABG_1} = \frac{1}{3}S_{ABD} = \frac{1}{3}S_{ABC} = S_{ABG_2}$ и триъгълниците ABG_1 и ABG_2 са с обща основа, то височините в тези триъгълници към общата основа са също равни. Това означава, че $G_1G_2 \parallel AB$. По аналогичен начин следва, че $G_3G_4 \parallel CD$, $G_1G_4 \parallel AD$ и $G_2G_3 \parallel BC$. Заклучаваме, че $G_1G_2G_3G_4$ е успоредник.

(3) За втората част на решението могат да се използват и вектори. Имаме:

$$\vec{G_1G_2} = (\vec{G_1O} + \vec{OG_2}) = \frac{1}{3}(\vec{AO} + \vec{BO} + \vec{DO} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OA}) = \frac{1}{3}\vec{DC},$$

където O е произволна точка. Аналогично

$$\vec{G_4G_3} = (\vec{G_4O} + \vec{OG_3}) = \frac{1}{3}(\vec{AO} + \vec{CO} + \vec{DO} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) = \frac{1}{3}\vec{AB}.$$

Но $\vec{AB} = \vec{DC}$, защото $ABCD$ е успоредник и следователно $\vec{G_1G_2} = \vec{G_4G_3}$. Оттук отново следва, че $G_1G_2G_4G_3$ е успоредник.

Схема на оценяване: по 1 т. за доказателство, че P е среда на AN и Q е среда на CM , още 1 т. за довършване на доказателството, че $ABCD$ е успоредник.

В случай на (1). 2т. за доказване на $G_1O = \frac{1}{3}AC$ или на някое друго от аналогичните три равенства и 1 т. за довършване на решението.

В случай на (2). За съображението, че $S_{ABG_1} = \frac{1}{3}S_{ABD}$ (или за някой друг от триъгълниците с връх в медицентър) 1 т. За съображението, че триъгълниците ABG_1 и ABG_2 (или някоя друга от двойките триъгълници) са с обща основа и равни височини към тази основа – също 1 т. За заключението, че $G_1G_2 \parallel AB$ – още 1 т.

В случай на (3). По 1 т. за векторните равенства за $\vec{G_1G_2}$ и $\vec{G_3G_4}$ и още 1 т. за довършване на доказателството.

Задача 3. Всяка клетка на правоъгълна таблица с 6 реда и n стълба е оцветена в един от цветовете бяло, зелено или червено. За произволен правоъгълник от клетки на таблицата, който е с четири различни ъглови клетки, поне две от ъгловите му клетки са разноцветни. Да се намери възможно най-голямата стойност на n .

Решение: Във всеки стълб (от 6 клетки) има поне три двойки едноцветни клетки (ако в някой стълб поне три от клетките са едноцветни, твърдението е вярно за тях; в противен случай има по една двойка от всеки от цветовете). Ако $n \geq 16$, то общият брой двойки едноцветни клетки е поне $16 \cdot 3 = 48$. Оттук следва, че поне 16 от двойките са от един и същ цвят (например бял). Да номерираме клетките във всеки от стълбовете с числата от 1 до 6 в зависимост от номерата на редовете, в които се намират. Броят на различните ненаредени двойки (i, j) , където $i \neq j$ приемат стойности от 1 до 6, е равен на 15. Тъй като поне 16 от двойките клетки са бели, заключаваме, че поне две от

двойките са с една и съща номерация (i, j) в съответните им стълбове. Ясно е, че две такива двойки могат да бъдат избрани за ъгли на правоъгълник в таблицата и следователно ще получим правоъгълник, за който четирите му ъглови квадратчета са бели. Заклучаваме, че $n \leq 15$. (За пълно доказателство на факта, че $n \leq 15$ – общо 4 т., от които 2 т. за идеята да се броят ненаредените двойки от 6 елемента и 2 т. за завършване на тази част.)

Ще посочим пример за $n = 15$ (за верен пример 3 т.). Да кодираме шестте реда на таблицата с върховете на правилен шестоъгълник и най-напред да групираме по двойки съседните върхове на шестоъгълника. Това може да стане по 2 начина: (1,2), (3,4), (5,6) или (1,6), (2,3), (4,5), ако последователните върхове на шестоъгълника са номерирани с числата от 1 до 6. Всяко групиране може да се оцвети по 3 начина и така получаваме общо 6 различни начина за оцветяване. Сега групираме по следния начин: един връх с отсрещния, а останалите върхове – по двойки през връх. Възможни са 3 начина за разположение, а за всяко разположение – по 3 начина за оцветяване. Получаваме 9 различни начина, които заедно с предните 6 дават общо 15 начина. Ето едно оцветяване, направено по този начин:

Б	З	Ч	Б	З	Ч	Б	З	Ч	Б	З	Ч	Б	З	Ч	Б
Б	З	Ч	З	Ч	Б	З	Ч	Б	Б	З	Ч	Ч	Б	З	З
З	Ч	Б	З	Ч	Б	Ч	Б	З	Ч	Б	З	Б	З	Ч	Ч
З	Ч	Б	Ч	Б	З	Б	З	Ч	З	Ч	Б	Ч	Б	З	З
Ч	Б	З	Ч	Б	З	Ч	Б	З	Б	З	Ч	Ч	З	Ч	Б
Ч	Б	З	Б	З	Ч	З	Ч	Б	З	Ч	Б	Б	З	Ч	Ч

Задача 4. За всяко естествено число n подреждаме делителите му по големината:

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n.$$

Да се намерят всички n , за които е вярно равенството $d_2^3 + d_3^3 - 15 = n$.

Решение: Тъй като всеки делител на d_2 е делител на n , то d_2 трябва да е просто, защото n няма по-малък делител от d_2 , освен 1. Нека $d_2 = p$, p – просто. Същото разсъждение, приложено за d_3 , дава, че d_3 е или просто, или $d_3 = p^2$. Ако е налице втората възможност, то от даденото равенство ще следва, че p^2 дели 15, което е невъзможно. Следователно можем да считаме, че и d_3 е просто. Нека $d_3 = q > p$. Тъй като p и q са взаимно прости делители на n , то n ще се дели на произведението pq и можем да означим $n = kpq$ за някакво естествено число k . Ако $k = 1$, то даденото равенство приема вида $p^3 + q^2 - 15 = pq$. Оттук при $p = 2$ получаваме, че q трябва да дели 7, т.е. $q = 7$. В този случай обаче равенството не е изпълнено (проверете!). Ако $p > 2$, то от неравенствата $q^2 > pq$ и $p^3 - 15 > 0$ следва, че $p^3 + q^2 - 15 > pq$ и решение отново не се получава. Заклучаваме, че $k > 1$. Ако допуснем, че $1 < k < p$, то от факта, че k дели n ще получим, че n има делител между 1 и d_2 , което е невъзможно. Да разгледаме случая $k = p$. Сега даденото равенство приема вида $p^3 + q^2 - 15 = p^2q$. Да запишем последното като квадратно уравнение относно q . Получаваме $q^2 - p^2q + p^3 - 15 = 0$. За да има това уравнение цяло решение, е необходимо дискриминантата му D да е точен квадрат на цяло число. Тъй като $D = p^4 - 4p^3 + 60 = (p^2 - 2p - 2)^2 - 8p + 56$, то $D < (p^2 - 2p - 2)^2$ при $p \geq 8$. От друга

страна $D - (p^2 - 2p - 3)^2 = 2p^2 - 12p + 51 = 2p(p - 6) + 51$. Става ясно, че при $p \geq 8$ дискриминантата не може да е точен квадрат, понеже $(p^2 - 2p - 3)^2 < D < (p^2 - 2p - 2)^2$ и следователно D е заключена между два последователни точни квадрата. Ето защо решения на задачата могат да се получат само за $p = 2, 3, 5$ или 7 . Но $p = 3$ и $p = 5$ са делители на 15 и би се получило, че p дели q , което е невъзможно. При $p = 2$ ще получим $q^2 - 7 = 4q \Rightarrow q \mid 7 \Rightarrow q = 7, n = 28$, но непосредствено се проверява, че това не е решение на задачата. При $p = 7$ имаме $q^2 + 328 = 49q$ и следователно q е прост делител на $328 = 2^3 \cdot 41$. Тъй като $q > p = 7$, то $q = 41$ и оттук $n = 2009$. Проверката показва, че се получава решение на задачата. По-нататък, не може $p < k < q$, понеже от $k \mid n$ би се получило, че n има делител между d_2 и d_3 . Ако най-накрая $k \geq q$, то имаме $n = kpq \geq pq^2 = q^2 + (p-1)q^2 \geq q^2 + (p-1)(p+1)^2 = q^2 + p^3 - 15 + p^2 - p + 14 > q^2 + p^3 - 15$, което означава, че даденото равенство не е изпълнено. Тук използвахме, че $q > p \Rightarrow q \geq p + 1$. Следователно единственото решение на задачата е $n = 2009$.

Схема на оценяване: **1 т.** за получаване на равенството $p^3 + q^2 - 15 = kpq$; **1 т.** за случая $k = 1$; **3 т.** за случая $k = p$, от които **2 т.** за изследване на дискриминантата и **1 т.** за получаването на отговора 2009 ; **1 т.** общо за случаите $1 < k < p$ и $p < k < q$; **1 т.** за случая $k \geq q$.

Задачите и темите са обсъдени от членовете на Националната комисия по математика 4 – 8 клас в състав:

проф. Сава Гроздев – председател
 ст. н. с. д-р Тони Чехларова – отговорник за 4 клас
 докторант Ирина Шаркова и докторант Иван Ангелов – отговорници за 5 клас
 гл. ас. Теодоси Витанов и Емил Карлов – отговорници за 6 клас
 ст. н. с. д-р Ивайло Кортезов – отговорник за 7 клас
 гл. ас. д-р Николай Колев и докторант Светлозар Дойчев – отговорници за 8 клас

Автори на задачите са:

Тони Чехларова – 4.1, 4.2, 4.3, 5.1, 5.2, 6.1, 7.1
 Ирина Шаркова – 5.3, 8.2
 Емил Карлов – 6.2, 7.2
 Ивайло Кортезов – 7.4, 8.3
 Светлозар Дойчев и Сава Гроздев – 4.4, 5.4, 6.3, 6.4, 7.3, 8.1, 8.4