Иван Салабашев 2008
Решения на задачите от темата за 10.-11.-12. клас

$\boxed{\textbf{1.}}$ Правите $y = x$ и $y = -kx$ пресичат графиката на параболота $y = x^2$ в точки A и B, различни от началото O на координатната система. Ако $\sphericalangle OAB = 90^\circ$, то k е равно на:

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4.

Отговор: Б. Понеже $A = (1, 1)$ и $B = (-k, k^2)$, то

$$k^2 + k^4 = OB^2 = OA^2 + AB^2 = 2 + (1 + k)^2 + (1 - k^2)^2,$$

т.е. $(k + 1)(k - 2) = 0$, откъдето $k = 2$ (понеже правите са различни).

$\boxed{\textbf{2.}}$ Дадени са 3 бели, 3 зелени и 4 червени топки. Вероятността в проценти произволно избрани три от тях да са разноцветни е равна на:

А) 10; **Б)** 20; **В)** 25; **Г)** 30.

Отговор: Г. Имаме $\binom{10}{3} = 120$ ненаредени тройки от топки измежду 10-те, от които $3.3.4 = 36$ са разноцветни. Следователно търсената вероятност е равна на $\frac{36}{120} = \frac{3}{10} = 30\%$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Броят на четирицифрените числа, за които след изтриване на коя да е тяхна цифра полученото число се дели на 7, е равен на:

А) 6; **Б)** 7; **В)** 8; **Г)** 9.

Отговор: В. Нека числото $\overline{abcd}$ има даденото свойство Тогава 7 дели $\overline{acd} - \overline{bcd} = 100(a - b)$, т.е. $a - b$. По подобен начин следва, че всички цифри на числото дават един и същ остатък при деление на 7. Ако някоя цифра е по-голяма от 7, от нея изваждаме 7 и свойството се запазва. Получаваме, че 7 дели $\overline{eeee} = 1111e$, $0 \le e \le 6$. Понеже 7 не дели 1111, следва, че 7 дели e, откъдето $e = 0$. И така, всички числа с даденото свойство започват със 7, а останалите цифри са 0 или 7. Тези числа са 8 на брой.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Броят на решенията на системата $\left|\begin{array}{l} x + y = yz \\ y + z = zx \\ z + x = xy \end{array}\right.$ в рационални числа е равен на:

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4.

Отговор: Б. Ако някое от числата е 1, например z, от първото уравнение следва, че $x = 0$ и тогава третото води до противоречието $z = 0$. Тогава от първото уравнение $y = \frac{x}{z-1}$ и като заместим във второто намираме, че $\frac{x}{z-1} + z = zx$, т.е. $x = \frac{z(z-1)}{z(z-1)-1}$ и оттам $y = \frac{z}{z(z-1)-1}$. Сега от третото уравнение получаваме, че $z + \frac{z(z-1)}{z(z-1)-1} = \frac{z^2(z-1)}{(z(z-1)-1)^2}$, което е еквивалентно на $z(z - 2)(z^3 + z^2 - 2z - 1) = 0$. Рационалните решения на последното уравнение са 0 и 2 (защо?), откъдето $x = y = z = 0$ или $x = y = z = 2$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Най-голямото число a, за което уравнението $x^4 - 2ax^3 + a(a+1)x - 2ax + a^2 = 0$ има реален корен, е равно на:

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 3.

Отговор: Б. Записваме уравнението във вида $(x^2 + 1)(x - a)^2 + (a - 1)x^2 = 0$. Ясно е, че при $a > 1$ лявата страна е положителна и значи уравнението няма корен, а при $a = 1$ единственият корен е $x = 1$. (Може да се покаже, че при $a < 1$ винаги имаме корен.)

$\boxed{6.}$ Броят на двойките (x, y) от цели числа, за които $x < 2008$ и $x^3 = y^2 + xy$ е равен на

А) 87; **Б)** 88; **В)** 89; **Г)** 90.

Отговор: В. Нека $d = \text{НОД}(x, y)$, $x = du$ и $y = dv$. Тогава $du^3 = v(u + v)$ и понеже числата v и $u + v$ са взаимно прости с u, следва, че $u = 1$. Значи решенията на даденото уравнение са $(x, y) = (v(v + 1), v^2(v + 1))$. Да забележим, че на различни стойности v съответстват различни двойки с изключение на $v = 0$ и $v = -1$. Условието $x < 2008$ е еквивалетно на $-45 \le v \le 44$, откъдето следва, че отговорът на задачата е $45 + 44 = 89$.

Задача 7. Допирателните през A и B към описаната около $\triangle ABC$ окръжност се пресичат в точка D. Нека E и F са проекциите на D върху правите AC и BC. Да се докаже, че правата EF е перпендикулярна на медианата през върха C.

Решение. Нека $CN \perp EF$, $N \in EF$ и $CN \cap AB = M$. Понеже $\sphericalangle ACN = \sphericalangle DEF$ и $\sphericalangle BCN = \sphericalangle DFE$, от синусовата теорема за $\triangle DEF$ следва, че

$$(1) \quad \frac{DE}{DF} = \frac{\sin \sphericalangle BCN}{\sin \sphericalangle ACN}.$$

От друга страна, тъй като DA и DB са допирателни, то $DA = DB$, $\sphericalangle DAE = \sphericalangle ABC$, $\sphericalangle DBF = \sphericalangle BAC$ и значи

$$(2) \quad \frac{DF}{DE} = \frac{DB \sin \sphericalangle DBF}{DA \sin \sphericalangle DAE} = \frac{\sin \sphericalangle BAC}{\sin \sphericalangle ABC}.$$

Накрая, от синусовите теореми за $\triangle ACM$, $\triangle BCM$ и $\triangle ABC$ следва, че

$$(3) \quad \frac{AM}{BM} = \frac{\sin \sphericalangle ACM}{\sin \sphericalangle BCM} . \frac{\sin \sphericalangle ABC}{\sin \sphericalangle BAC}.$$

Като умножим почленно (1), (2) и (3), получаваме, че $AM = BM$.

Оценяване. По 2 т. за (1), (2) и (3).

Задача 8. Нека $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ е такава функция, че $f(x + f(y)) = yf(xy + 1)$ за произволни $x, y > 0$.

а) Да се докаже, че $(y - 1)(f(y) - 1) \le 0$.

б) Да се намерят всички функции, изпълняващи даденото равенство.

Решение. а) Ако допуснем, че $f(y) > 1$ за някое $y > 1$, то при $x = \frac{f(y)-1}{y-1} > 0$ имаме, че $x + f(y) = xy + 1$ и значи $y = \frac{f(x+f(y))}{f(xy+1)} = 1$ – противоречие. Аналогично се доказва, че $f(y) \ge 1$ при $y < 1$.

б) Първо ще докажем, че (*) $f(y) = \frac{1}{y}$ при $y > 1$. Полагайки $x = 1 - \frac{1}{y} > 0$, следва, че $f(1+f(y)-1/y) = yf(y)$. Ако $f(y) > \frac{1}{y}$ за някое $y > 1$, оттук и а) получаваме $f(1+f(y)-1/y) < 1$ – противоречие. Аналогично се показва, че е невъзможно $f(y) < \frac{1}{y}$, с което (*) е доказано.

По-нататък, $f(x + 1/y) = f(x + f(y)) = yf(xy + 1) = \dfrac{1}{x + 1/y}$ при $x > 0, y > 1$. Тъй като за $0 < x' < x \le 1$ и $y = \frac{1}{x-x'} > 1$ имаме, че $x = x' + 1/y$, то $f(x) = \frac{1}{x}$ за всяко $x > 0$. Тази функция очевидно изпълнява даденото условие.

Оценяване. 2 т. за а) и 4 т. за б), от които 2 т. за (*) (само при 0 т. да се дава 1 т. за познат отговор).

Задачите от тази тема са предложени от Николай Николов.