Иван Салабашев 2008

Решения на задачите от темата за 7. клас

$\boxed{\textbf{1.}}$ Кое от посочените числа е решение на уравнението $\frac{x+5}{2}-\frac{x-1}{3}=\frac{x+3}{2}-\frac{x-3}{9}+\frac{1}{18}$?

А) $\frac{4}{17}$; **Б)** $-\frac{17}{4}$; **В)** $\frac{17}{4}$; **Г)** $-\frac{4}{17}$.

Отговор: В. Уравнението е еквивалентно последователно на $\frac{x+5}{2}-\frac{x+3}{2}=\frac{x-1}{3}-\frac{x-3}{9}+\frac{1}{18} \iff 1=\frac{4x+1}{18} \iff x=\frac{17}{4}$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Най-голямото цяло число, което е решение на неравенството

$$(x-2)^2+(x-3)^2+(x-4)^2 \geq (3x-1)(x-3)+28,$$

е:

А) -2; **Б)** -1; **В)** 0; **Г)** 1.

Отговор: Б. След разкриване на скобите и опростяване получаваме еквивалентното неравенство $-18x+29 \geq -10x+31$, откъдето $x \leq -\frac{1}{4}$. Следователно търсеното число е -1.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Стойността на израза $\frac{(ab)^8a^7}{b^{22}}+|a+\frac{5}{9}|+|b-\frac{4}{9}|$ при $a=-\frac{1}{2}$ и $b=\frac{1}{2}$ е:

А) $-\frac{7}{18}$; **Б)** $-\frac{17}{18}$; **В)** $\frac{5}{18}$; **Г)** $\frac{25}{18}$.

Отговор: А. Даденият израз е равен на $\frac{a^{15}}{b^{14}}+|a+\frac{5}{9}|+|b-\frac{4}{9}|$. След заместване получаваме, че търсената стойност е $-\frac{1}{2}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}=-\frac{7}{18}$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Точките $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ са разположени върху една права в посочения ред, като $A_0A_1 = A_1A_2 = 3\text{cm}$, $A_2A_3 = A_3A_4 = 5\text{cm}$ и т.н. (т.е. $A_{2i}A_{2i+1} = A_{2i+1}A_{2i+2} = 2i+3$ cm). Колко сантиметра е дължината на отсечката A_4A_{19}?

А) 200; **Б)** 201; **В)** 202; **Г)** 203.

Отговор: Г. Имаме $A_4A_{19} = A_4A_6 + A_6A_8 + \cdots + A_{16}A_{18} + A_{18}A_{19} = 14+18+\cdots+38+21 = 3.52+26+21 = 203$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Два от ъглите на четириъгълник се отнасят така, както $2:7$, сумата на другите два е 180°, а най-големият ъгъл на четириъгълника е 150°. Тогава вторият по големина ъгъл на този четириъгълник е:

А) 20°; **Б)** 30°; **В)** 40°; **Г)** 45°.

Отговор: В. Ако двата ъгъла в отношение $2:7$ са съответно $2x$ и $7x$, то $2x+7x=360^\circ-180^\circ=180^\circ$, откъдето $x=20$. Тогава ъглите са 40°, 140°, 150° и 30° и вторият по големина ъгъл е 40°.

$\boxed{\textbf{6.}}$ Акциите на една фирма понижили стойността си два пъти във вторник, а във сряда последвало ново понижение с 60% и стойността им станала 3.56 лв. Колко лева са стрували акциите преди първото понижение?

А) 17.20; **Б)** 18.00; **В)** 17.90; **Г)** 17.80.

Отговор: Г. Ако първоначалната стойност е x лв., то тя е $0.5x$ след първото и $(1-0.6)(0.5x)=0.2x$ след второто понижение. Следователно имаме $0.2x=3.56$, откъдето $x=17.8$.

$\boxed{\mathbf{7.}}$ В една страна има 30 града, някои от които са свързани с пътища. Известно е, че от всеки град излизат по 8 пътя. Какъв е общият брой пътища?

А) 120; **Б)** 240; **В)** 60; **Г)** 180.

Отговор: А. От градовете излизат общо $30.8 = 240$ пътя, но всеки от тези пътища е преброен точно по два пъти. Следователно търсеният брой е $\dfrac{30.8}{2} = 120$.

$\boxed{\mathbf{8.}}$ Колко са шестцифрените числа, които се записват само с цифрите 1 и 2?

А) 32; **Б)** 15; **В)** 64; **Г)** 16.

Отговор: В. Във всяка от шестте позиции имаме точно по две възможности за цифра – 1 или 2. Следователно общият брой на възможностите (числата) е $2^6 = 64$.

$\boxed{\mathbf{9.}}$ Лодка се движи срещу течението със скорост 8 km/h и по течението със скорост 12 km/h. Най-много на колко километра може да се отдалечи лодката срещу течението, за да е сигурно, че ще се върне до час?

А) 5; **Б)** 4; **В)** $5\dfrac{1}{4}$; **Г)** $4\dfrac{4}{5}$.

Отговор: Г. Ако изминатото срещу течението разстояние е x km, то времето на плаване срещу течението е $\frac{x}{8}$ часа, а времето на плаване по течението е $\frac{x}{12}$ часа. Трябва да имаме $\frac{x}{8} + \frac{x}{12} \leq 8$, откъдето намираме $5x \leq 24$, т.е. $x \leq 4\dfrac{4}{5}$ km.

$\boxed{\mathbf{10.}}$ Колко цели числа са решения на неравенството

$$(x+2)(x-4) \leq 0\ ?$$

А) 2; **Б)** 6; **В)** 7; **Г)** 4.

Отговор: В. Ако $x < -2$, и двата множителя отляво са отрицателни и следователно произведението им е положително. Аналогично се вижда и че неравенството няма решения при $x > 4$. Останалите цели числа (а именно -2, -1, 0, 1, 2, 3, и 4 са решения и техният брой е 7.

$\boxed{\mathbf{11.}}$ Естествените числа x, y и z удовлетворяват равенството $x^2+y^2+z^2 = 6(x+y+z)$. Каква е максималната възможна стойност на z?

Отговор: 8. Тъй като $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2 = 27$, никое от числата $x-3$, $y-3$ и $z-3$ не може да е по-голямо от 5. От друга страна, равенството $27 = 1^2+1^2+5^2$ показва, че е възможно едно (т.е. кое да е) от тези числа да е равно на 5. Следователно търсената стойност е 8.

$\boxed{\mathbf{12.}}$ На остров Графландия има 27 града и села. Всеки град е свързан с пътища с точно 4 села, а всяко село е свързано с пътища с точно 5 града. Колко са градовете?

Отговор: 15. Ако x и y са съответно броя на градовете и селата, от условието следва, че $x+y = 27$ и $4x = 5y$ (последното идва от преброяването на пътищата град–село по два начина). Тогава $4x = 5(27-x)$, откъдето намираме $x = 15$.

$\boxed{\mathbf{13.}}$ Естественото число x е такова, че са верни точно две от твърденията "$x+17$ е точен квадрат", "последната цифра на x е 5" и "$x-72$ е точен квадрат". Да се намери x.

Отговор: 2008. Не е възможно да са верни едновременно първото и второто твърдения, защото тогава $x+17$ ще е точен квадрат, завършващ на 2. Аналогично се вижда, че не е възможно да са верни едновременно второто и третото твърдения. Следователно верните твърдения са първото и третото. Нека $x + 17 = m^2$ и $x - 72 = n^2$, където m и n са естествени числа. Тогава $m^2 - n^2 = 89$, т.е. $(m - n)(m + n) = 89$. Тъй като 89 е просто число, а $m - n$ и $m + n$ са негови естествени делители и $m - n < m + n$, заключаваме, че $m - n = 1$ и $m + n = 89$. Следователно $m = 45$ и търсеното число е $m^2 - 17 = 2008$.

14. В $\triangle ABC$ точките P и T са вътрешни съответно за страните AC и BC и са такива, че $PC = TC$, $\sphericalangle CPT = 70°$, $\sphericalangle PBA = 55°$ и PB е ъглополовяща на $\sphericalangle APT$. Да се намери $\sphericalangle PBT$.

Отговор: 15°. Да означим $\sphericalangle APB = x$. Тогава от условието следва, че $2x + 70° = 180°$ и значи $x = 55°$. Сега $\triangle ABP$ е равнобедрен и от него намираме $\sphericalangle BAP = 180° - 2.55° = 70°$. Тъй като $\sphericalangle BAP = \sphericalangle TPC = 70°$, правите AB и PT са успоредни.
Тъй като $\triangle PTC$ е равнобедрен, имаме $\sphericalangle PTC = \sphericalangle TPC = 70°$. Оттук и от доказаното $AB||PT$ следва, че $\sphericalangle ABC = 70°$. Тогава

$$\sphericalangle PBT = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABP = 70° - 55° = 15°.$$

15. За всяко число x определяме числото $\overline{x}$ по правилото $\overline{x} = ax + b$. Да се намери $b - a$, ако е известно, че за всяко число x е изпълнено равенството

$$\overline{x+1} = 4(\overline{x+4}) + x.$$

Отговор: 2. От условието следва, че $a(x + 1) + b = x + 4[a(x + 4) + b]$ е изпълнено за всяко x. Тогава са в сила равенствата $a = 4a + 1$ и $a + b = 16a + 4b$, откъдето намираме $a = -\dfrac{1}{3}$ и $b = \dfrac{5}{3}$. Следователно $b - a = 2$.

Задачите от тази тема са предложени от Петър Бойваленков.