Иван Салабашев 2008
Решения на задачите от темата за 8.-9. клас

$\boxed{\textbf{1.}}$ Числото $503^4 - 502^2(503^2 + 2.503 + 3)$ е равно на:

А) 502; **Б)** 503; **В)** 2008; **Г)** 2009.

Отговор: Г. Нека $n = 503$. Даденото число е равно на

$$n^4 - (n-1)^2(n^2 + 2n + 3),$$

което след опростяване става равно на $4n - 3$. Следователно отговорът е $4.503 - 3 = 2009$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Ако диагоналите на ромб се увеличат с 10%, то лицето му ще се увеличи с:

А) 1%; **Б)** 11%; **В)** 21%; **Г)** 31%.

Отговор: В. Лицето му се увеличава с $100((1+0.1)^2 - 1)\% = 21\%$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Последната цифра на числото $1 + 1.2 + 1.2.3 + \cdots + 1.2.3\ldots.2008$ е равна на :

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4.

Отговор: В. Всички числа в сумата без първите четири се делят на 10 и нейната последна цифра съвпада с тази на $1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 = 33$, т.е. е равна на 3.

$\boxed{\textbf{4.}}$ За колко стойности на реалния параметър a уравнението $|x - 1| = x + a$ има точно едно решение.

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** безбройно много.

Отговор: Г. При $x \geq 1$ уравнението е еквивалентно на $x - 1 = x + a$. Следователно в този случай то има 0 или безбройно много решения. При $x < 1$ уравнението е еквивалентно на $1 - x = x + a$, откъдето $x = \dfrac{1-a}{2}$. Следователно уравнението има точно едно решение при $\dfrac{1-a}{2} < 1$, т.е. за всяко $a > -1$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Най-малката стойност на израза $a^2 + b^2 - ab - a - b$ е равна на:

А) -1; **Б)** -2; **В)** -3; **Г)** -4.

Отговор: А. Имаме $2(a^2 + b^2 - ab - a - b) = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (a-b)^2 - 2 \geq -2$. Равенство се достига при $a = b = -1$.

$\boxed{\textbf{6.}}$ Броят на двойките цели числа (x, y), за които $8x^2 - 6xy + y^2 = 5$ е равен на:

А) 2; **Б)** 4; **В)** 6; **Г)** безбройно много.

Отговор: Б. Тъй като $8x^2 - 6xy + y^2 = (2x - y)(4x - y)$ следва, че

$$\left|\begin{array}{l} 2x - y = -5 \\ 4x - y = -1 \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{l} 2x - y = -1 \\ 4x - y = -5 \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ 4x - y = 5 \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{l} 2x - y = 5 \\ 4x - y = 1 \end{array}\right..$$

Оттук намираме, че

$$(x, y) = (2, 9), (-2, -3), (2, 3), (-2, -9).$$

$\boxed{\textbf{7.}}$ Нека $x = 2008 + \dfrac{1}{2008}$, $y = 2009 + \dfrac{1}{2009}$ и $z = 2008.2009 + \dfrac{1}{2008.2009}$. Числото $x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ е равно на:

А) 2; **Б)** 4; **В)** 6; **Г)** 8.

Отговор: Б. Нека $a = 2008$ и $b = 2009$. Тогава $x^2 = (a + \frac{1}{a})^2 = a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$, $y^2 = (b + \frac{1}{b})^2 = b^2 + 2 + \frac{1}{b^2}$, $z^2 = (ab + \frac{1}{ab})^2 = a^2b^2 + 2 + \frac{1}{a^2b^2}$ и $xyz = (a + \frac{1}{a})(b + \frac{1}{b})(ab + \frac{1}{ab}) = a^2b^2 + 1 + a^2 + \frac{1}{b^2} + b^2 + \frac{1}{a^2} + 1 + \frac{1}{a^2b^2}$. Следователно $x^2 + y^2 + z^2 - xyz = 4$

$\boxed{8.}$ Броят на естествените числа n, за които $\dfrac{n^2 - n - 12}{n - 3}$ е естествено число е равен на:

А) 4; **Б)** 5; **В)** 6; **Г)** 7.

Отговор: Б. От $\dfrac{n^2 - n - 12}{n - 3} = n + 2 - \dfrac{6}{n - 3}$ следва, че $n - 3|6$, откъдето $n \in \{4, 2, 5, 1, 6, 9\}$. Тъй като $\dfrac{n^2 - n - 12}{n - 3} = \dfrac{(n - 4)(n + 3)}{n - 3} > 0$ заключаваме, че $n = 1, 2, 5, 6, 9$.

$\boxed{9.}$ Колко най-много остри ъгли може да има изпъкнал шестоъгълник?

А) 2; **Б)** 3; **В)** 4; **Г)** 5.

Отговор: Б. Сумата на ъглите на изпъкнал шестоъгълник е 720° и всеки от тях е по-малък от 180°. Ако 4 от ъглите са остри, то сумата на останалите два е по-голяма от 360°, т.е. поне един от тях е по-голям от 180° . Построите пример на изпъкнал шестоъгълник с 3 остри ъгъла.

$\boxed{10.}$ Колко четирицифрени числа $N = \overline{abcd}$ изпълняват следните три условия:
(1) $4000 \le N < 6000$ (2) N се дели на 5 (3) $3 \le b < c \le 6$

А) 10; **Б)** 18; **В)** 24; **Г)** 36.

Отговор: В. От (1) следва, че $a \in \{4, 5\}$, а от (2), че $d \in \{0, 5\}$. Третото условие показва, че

$$(b, c) = (3, 4),\ (3, 5),\ (3, 6),\ (4, 5),\ (4, 6),\ (5, 6).$$

Следователно има $2.2.6 = 24$ числа N с исканото свойство.

$\boxed{11.}$ Нека ABC е равнобедрен триъгълник с основа AB и $\sphericalangle ACB = 30^\circ$, M е средата на AB, а K и L са симетричните точки на M относно правите AC и BC. Правата KL пресича страните AC и BC съответно в точки E и F. Да се намери периметъра на $\triangle MEF$, ако $CM = 2$.

Отговор: 2. Тъй като $ME = KE$ и $MF = FL$, периметърът на $\triangle MEF$ е равен на KL. От друга страна $CK = CM = CL$ и $\sphericalangle KCL = \sphericalangle KCM + \sphericalangle LCM = 2 \sphericalangle ACM + 2 \sphericalangle BCM = 2 \sphericalangle ACB = 60^\circ$. Следователно $\triangle KLC$ е равностранен и $KL = KC = CL = CM = 2$.

$\boxed{12.}$ Колко нееднакви триъгълници с периметър 20 имат целочислени страни?

Отговор: 8. Нека $0 < a \le b \le c$ са страните на един такъв триъгълник. От $c < a + b$ следва, че $2c < a + b + c = 20$, т.е $c \le 9$. От $3c \ge a + b + c = 20$ следва, че $c \ge 7$. При $c = 7$ имаме $a + b = 13$, т.е. $a = 6,\ b = 7$. При $c = 8$ имаме $a + b = 12$, т.е. $a = 6,\ b = 6$; $a = 5,\ b = 7$ и $a = 4,\ b = 8$. При $c = 9$ имаме $a + b = 11$, т.е. $a = 5,\ b = 6$; $a = 4,\ b = 7$; $a = 3,\ b = 8$ и $a = 2,\ b = 9$.
Общо имаме 8 нееднакви триъгълника с исканите свойства.

$\boxed{13.}$ Графиките на функциите $y = -|x - a| + b$ и $y = |x - c| + d$ се пресичат в точките с координати $(2, 5)$ и $(8, 3)$. Да се намери числото $a + c$.

Отговор: 10. От условието следва, че $5 = -|2-a| + b$, $5 = |2-c| + d$, $3 = -|8-a| + b$ и $3 = |8-c| + d$. Като извадим първото и третото равенство получаваме $|8-a| - |2-a| = 2$, откъдето $a = 4$. Аналогично $|2-c| - |8-c| = 2$, откъдето $c = 6$. Следователно $a + c = 10$.

14. Нека $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ са цели числа, за които $0 \le a_i < i,\ i = 2, 3, \dots, 7$ и такива, че

$$\frac{5}{7} = \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \frac{a_4}{4!} + \frac{a_5}{5!} + \frac{a_6}{6!} + \frac{a_7}{7!},$$

където $n! = 1.2.\dots.n$. Да се намери произведението $a_2a_3a_4a_5a_6a_7$.

Отговор: 0. Умножаваме двете страни на равенството по $7!$ и получаваме

$$3600 = 2520a_2 + 840a_3 + 210a_4 + 42a_5 + 7a_6 + a_7.$$

Следователно $7|3600 - a_7$, т.е. $a_7 = 2$. Като заместим и съкратим на 7 получаваме $514 = 360a_2 + 120a_3 + 30a_4 + 6a_5 + a_6$. Тогава $6|514 - a_6$, т.е. $a_6 = 4$. Като заместим и съкратим на 6 получаваме $85 = 60a_2 + 20a_3 + 5a_4 + a_5$. Следователно $5|85 - a_5$, т.е. $a_5 = 0$. Търсеното произведение е равно на 0.

15. Сумата на няколко естествени числа, които са по-големи от 1 и са две по две взаимнопрости е равна на 96. Колко най-много е броят на тези числа?

Отговор: 7. Имаме $96 = 2 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 41$. Ако броят на числата е по-голям от 7, то поне 8 от тях са нечетни числа. Разглеждаме техните най-малки прости делители. Тяхната сума не надминава 96, което е противоречие, защото сумата на първите 8 нечетни прости числа е 98.

Задачите от тази тема са предложени от Олег Мушкаров.