

Министерство на образованието и науката

Американска Фондация за България

Контролно за определяне на отбора за Международната
олимпиада по математика, Испания 2008

Първи ден
вторник, 27 май 2008, ИМИ-БАН

Задача 1. Нека n е естествено число. В едно от полетата на таблица $n \times n$ е разположена пешка. Пешката има право на всеки ход да се придвижи от произволно поле на k -тия стълб, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, в произволно поле на k -тия ред. Да се докаже, че е възможно с поредица от n^2 хода пешката да посети всички полета на таблицата, завършвайки поредицата в изходното поле.

Задача 2. Нека P е точка от вътрешността или от контура на $\triangle ABC$. Означаваме с d_a , d_b и d_c разстоянията от P съответно до страните BC , CA и AB . Да се докаже, че

$$\max\{AP, BP, CP\} \geq \sqrt{d_a^2 + d_b^2 + d_c^2}.$$

Кога се достига равенство?

Задача 3. Нека $\mathbb{R}^+$ е множеството на положителните реални числа. Да се намерят всички реални числа a , за които съществува функция $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, такава, че $3f^2(x) = 2f(f(x)) + ax^4$ за всяко $x > 0$.

Време за работа: 4 часа и 30 минути

Националната комисия Ви пожелава успех!

Министерство на образованието и науката

Американска Фондация за България

Контролно за определяне на отбора за Международната
олимпиада по математика, Испания 2008

Втори ден
сряда, 28 май 2008, ИМИ-БАН

Задача 4. За всяко естествено число n означаваме с a_n първата цифра на 2^n . Рационално ли е числото $0, a_1 a_2 a_3 \dots$?

Задача 5. В $\triangle ABC$ са прекарани медианата AM , $M \in BC$ и височините CC_1 , $C_1 \in AB$ и BB_1 , $B_1 \in AC$. Правата през A , перпендикулярна на AM пресича правите BB_1 и CC_1 съответно в точки E и F . Означаваме с k описаната около $\triangle EFM$ окръжност. Нека k_1 и k_2 са окръжности, допиращи се до EF и до дъгата EF от k , не съдържаща M . Ако P и Q са пресечните точки на k_1 и k_2 , да се докаже, че точките P , Q и M лежат на една права.

Задача 6. Даден е ориентиран граф G с безбройно много върхове. Известно е, че за всеки връх броят на изходящите ребра е по-голям от броя на входящите ребра. Нека O е фиксиран връх на G . За произволно естествено число n с V_n означаваме броя на върховете, които могат да бъдат достигнати от O , минавайки по не повече от n ребра (самият връх O също се брои). Да се намери най-малката възможна стойност на V_n .

Време за работа: 4 часа и 30 минути

Националната комисия Ви пожелава успех!