

$$x^n + y^n = z^n$$

Мирослав Стоенчев

8 май 2008 г.

Задача 1. Нека $n \geq 3$ е естествено число. Да се докаже, че уравнението $x^n + y^n = z^n$ няма решения в естествени числа x, y, z за които $z \leq 2^n$.

Д-во: Да допуснем, че съществуват естествени числа $x, y, z \leq 2^n : x^n + y^n = z^n$.

Б.о.о. ще считаме, че $\gcd(x, y, z) = 1$.

От уравнението получаваме $\gcd(x, y) = \gcd(y, z) = \gcd(z, x) = 1$.

Поради неразрешимостта на уравнението $a^3 + b^3 = c^3$ в естествени числа, ще считаме, че $\gcd(3, n) = 1$.

Първи случай: $n = 2n_1 + 1$ е нечетно естествено число. Ако допуснем, че x е четно, то получаваме y, z са нечетни и $z - y \equiv 0 \pmod{2^n}$, което е невъзможно, понеже $z - y < z \leq 2^n$. Аналогичен е случая y четно.

Следователно единствената възможност е z — четно, а x, y — нечетни.

Тогава $z = 2z_1$, $(x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots - xy^{n-2} + y^{n-1}) = 2^n z_1^n$.

Понеже числото $x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots - xy^{n-2} + y^{n-1}$ е нечетно, то $2^n | x + y$. Оттук заключаваме, че z_1 е нечетно. В противен случай ще се окаже, че $4^n | (x + y)$, което е невъзможно. И като вземем в предвид неравенствата $2^n \leq x + y < 2z \leq 2^{n+1} \Rightarrow x + y = 2^n \Rightarrow \exists k : x = 2^{n-1} - k, y = 2^{n-1} + k$. Следователно k е нечетно и

$$(1) (2^{n-1} - k)^n + (2^{n-1} + k)^n = 2^n z_1^n \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2j} 2^{(n-1)(n-2j-1)} k^{2j} = z_1^n.$$

Поради $x \geq 3$ и $y = \max\{x, y\} \leq z - 1 \Rightarrow 2^{n-1} + k + 1 \leq z = 2z_1 \Rightarrow (2)$

$$(2) 1 \leq k \leq 2^{n-1} - 3, 2^{n-2} + \frac{k+1}{2} \leq z_1 \leq 2^{n-1} - 1$$

Записваме уравнението във вида $y^n = (z - x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + zx^{n-2} + x^{n-1})$.

Всеки прост делител на $(z - x)$ е делител на y , следователно всеки прост делител p на $(z - x)$ е делител и на $(z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + zx^{n-2} + x^{n-1})$.

Наистина, $p | (z - x) \Rightarrow p | y \Rightarrow p^n | y^n \Rightarrow p^n | (z - x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + zx^{n-2} + x^{n-1})$. Но $z - x < 2^n < 3^n \leq p^n$.

Следователно $p | (z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + zx^{n-2} + x^{n-1})$. Като вземем в предвид, че $z \equiv x \pmod{p} \Rightarrow 0 \equiv z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + zx^{n-2} + x^{n-1} \equiv n z^{n-1} \pmod{p} \Rightarrow p | n \Rightarrow p \geq 5$.

Нека $p^s || (z - x)$. Ако $n_1 + 1 \leq s \Rightarrow 2^{n+1} = 2^{2n_1+2} = 4^{n_1+1} < 5^{n_1+1} \leq p^{n_1+1} \leq p^s \leq z - x < 2^n$, така докажем, че $s \leq n_1$. Понеже разглежданията ги проведехме за произволен нечетен прост делител $p | (z - x)$, то като извод можем да запишем:

$$(3) \quad z - x = \prod_{j=1}^l p_j^{\alpha_j}, \quad 5 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_l, \quad \max_{1 \leq j \leq l} \{\alpha_j\} \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = n_1,$$

Също така $p_i^{\alpha_i} || z - x \Rightarrow p_i^{n-\alpha_i} | (z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + zx^{n-2} + x^{n-1})$, както и $\alpha_i \leq n - \alpha_i \Rightarrow$

$$(4) \quad z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + zx^{n-2} + x^{n-1} \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

$$z \equiv x \pmod{p_i^{\alpha_i}} \Rightarrow 0 \equiv z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + zx^{n-2} + x^{n-1} \equiv nx^{n-1} \pmod{p_i^{\alpha_i}} \Rightarrow p_i^{\alpha_i} | n \Rightarrow (5)$$

$$(5) \quad n \equiv 0 \pmod{\prod_{j=1}^l p_j^{\alpha_j}} \Rightarrow (z - x) | n \Rightarrow z - x \leq n$$

Записвайки изходното уравнение във вида $x^n = (z - y)(z^{n-1} + z^{n-2}y + \dots + zy^{n-2} + y^{n-1})$ по аналогичен начин доказваме, че

$$n \equiv 0 \pmod{\prod_{i=0}^t q_i^{\beta_i}}, \quad z - y = \prod_{i=0}^t q_i^{\beta_i}$$

$$(6) \quad (z - y) | n \Rightarrow z - y \leq n$$

Използвайки (2) получаваме $2n^2 < 2^{n-1} + k + 1 \leq z \Rightarrow 2n^2 < z$, при $n \geq 8$.

$$(7) \quad 2n^2 < z, \quad 8 \leq n$$

Използвайки (7) достигаем до

$$(8) \quad z^{n-1} + z^{n-2}y + \dots + zy^{n-2} + y^{n-1} < nz^{n-1} < \left(\frac{z}{2n}\right) z^{n-1} = \frac{z^n}{2n}$$

$$(9) \quad z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + zx^{n-2} + x^{n-1} < nz^{n-1} < \left(\frac{z}{2n}\right) z^{n-1} = \frac{z^n}{2n}$$

Накрая, използвайки (5) – (9) получаваме

$$(10) \quad x^n = (z - y)(z^{n-1} + z^{n-2}y + \dots + zy^{n-2} + y^{n-1}) < (z - y) \frac{z^n}{2n} = \left(\frac{z - y}{2n}\right) z^n \leq \frac{z^n}{2}$$

$$(11) \quad y^n = (z - x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + zx^{n-2} + x^{n-1}) < (z - x) \frac{z^n}{2n} = \left(\frac{z - x}{2n}\right) z^n \leq \frac{z^n}{2}$$

Така получихме:

$$z^n = x^n + y^n < \frac{z^n}{2} + \frac{z^n}{2} = z^n, \quad n \geq 8.$$

Остава да се разгледат случаите $n \leq 7$, т.е. $n = 5$, $n = 7$, тъй като n е нечетно и взаимно просто с 3. Лесно се доказва, че уравненията $x^5 + y^5 = z^5$, $x^7 + y^7 = z^7$ нямат решения в естествени числа x, y, z при съответните ограничения $z \leq 2^5$, $z \leq 2^7$.

Разглеждаме уравнението $x^p + y^p = z^p$, при $z \leq 2^p$, $p \geq 5$, където p е просто число. По горе доказахме, че $(z-x)|p$, $(z-y)|p$, $x+y = 2^p$. Тогава $z-y = p$, $z-x = 1$, $x+y = 2^p \Rightarrow p|x$, $x-y = p-1 \Rightarrow 2x = 2^p + p-1 \Rightarrow 2^p - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, което е невъзможно.

Втори случай: $n = 2n_1$ е четно естествено число. Б.о.о. ще считаме, че n_1 е нечетно. В противен случай бихме достигнали до уравнение от вида $a^4 + b^4 = c^4$, което няма решения в естествени числа.

Ако допуснем, че z е четно, то x, y са нечетни и $x^n + y^n \equiv (x^{n_1})^2 + (y^{n_1})^2 \equiv 0 \pmod{2^n}$. Но $(x^{n_1})^2 \equiv (y^{n_1})^2 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow (x^{n_1})^2 + (y^{n_1})^2 \equiv 2 \pmod{4}$, т.е. 4 не дели $x^n + y^n$.

Остана случая z —нечетно. Тогава точно едно от числата x, y е четно. Б.о.о. ще считаме, че $x = 2x_1$ е четно. Следователно

$$x^n = 2^n x_1^n = (z^2 - y^2)(z^{2(n_1-1)} + z^{2(n_1-2)}y^2 + \dots + z^2y^{2(n_1-2)} + y^{2(n_1-1)}) \Rightarrow z^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{2^n}$$

$$\gcd\left(\frac{z-y}{2}, \frac{z+y}{2}\right) = 1, \quad \frac{z-y}{2} \frac{z+y}{2} \equiv 0 \pmod{2^{n-2}}.$$

Така точно едно от числата $\frac{z-y}{2}, \frac{z+y}{2}$ е четно. Ще разгледаме два подслучая:

2.1 $\frac{z+y}{2}$ е нечетно. Тогава $z-y \equiv 0 \pmod{2^{n-1}} \Rightarrow 2^{n-1} \leq z-y < z \leq 2^n \Rightarrow z-y = 2^{n-1}$. Уравнението приема вида:

$$x_1^n = (2^{n-2} + y)(z^{2(n_1-1)} + z^{2(n_1-2)}y^2 + \dots + z^2y^{2(n_1-2)} + y^{2(n_1-1)})$$

Поради $2^{n-2} + y = (2^{n-1} + y) - 2^{n-2} = z - 2^{n-2} \leq 3 \cdot 2^{n-2} < 2^n \Rightarrow$ за всеки прост делител p на $2^{n-2} + y$ имаме $z^{2(n_1-1)} + z^{2(n_1-2)}y^2 + \dots + z^2y^{2(n_1-2)} + y^{2(n_1-1)} \equiv 0 \pmod{p}$.

Нека

$$2^{n-2} + y = \prod_{j=1}^k p_j^{a_j}; \quad 5 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_k; \quad \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \leq n_1 - 1.$$

Наистина, ако за някое $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ имаме $a_i \geq n_1 \Rightarrow 2^n = 4^{n_1} < 5^{n_1} \leq p_i^{a_i} \leq 2^{n-2} + y < 2^n$. Следователно $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \Rightarrow z^{2(n_1-1)} + z^{2(n_1-2)}y^2 + \dots + z^2y^{2(n_1-2)} + y^{2(n_1-1)} \equiv 0 \pmod{p_i^{a_i}}$, т.е.

$$z^{2(n_1-1)} + z^{2(n_1-2)}y^2 + \dots + z^2y^{2(n_1-2)} + y^{2(n_1-1)} \equiv 0 \pmod{\prod_{j=1}^k p_j^{a_j}}$$

От друга страна

$$z \equiv 2^{n-1} + y \equiv 2^{n-2} \equiv -y \pmod{\prod_{j=1}^k p_j^{a_j}}$$

Ето защо

$$0 \equiv z^{2(n_1-1)} + z^{2(n_1-2)}y^2 + \dots + z^2y^{2(n_1-2)} + y^{2(n_1-1)} \equiv n_1 y^{2(n_1-1)} \pmod{\prod_{j=1}^k p_j^{a_j}} \Rightarrow n_1 \equiv 0 \pmod{\prod_{j=1}^k p_j^{a_j}}$$

Т.е. $(2^{n-2} + y)|n_1 \Rightarrow 2^{2n_1-2} + y \leq n_1$, което е невъзможно.

2.2 $\frac{z-y}{2}$ е нечетно. Тогава $z + y \equiv 0 \pmod{2^{n-1}} \Rightarrow 2^{n-1} \leq z + y < 2z \leq 2^{n+1} \Rightarrow z + y = 2^{n-1}$, $z + y = 2^n$. Отново разглеждаме два подслучая:

2.2.1 $z + y = 2^n$. Изходното уравнение е еквивалентно на

$$x_1^n = (z - y)(z^{2(n_1-1)} + z^{2(n_1-2)}y^2 + \dots + z^2y^{2(n_1-2)} + y^{2(n_1-1)}) \Rightarrow 2|x_1 \Rightarrow 2^n|z - y,$$

което е невъзможно.

2.2.2 $z + y = 2^{n-1}$. Уравнението е еквивалентно на

$$x_1^n = (z - 2^{n-2})(z^{2(n_1-1)} + z^{2(n_1-2)}y^2 + \dots + z^2y^{2(n_1-2)} + y^{2(n_1-1)})$$

Записваме уравнението във вида

$$y^n = (z - x)(z + x)(z^{2(n_1-1)} + z^{2(n_1-2)}x^2 + \dots + z^2x^{2(n_1-2)} + x^{2(n_1-1)})$$

Имаме $\gcd(z - x, z + x) = 1$, $z + x \geq \frac{z+y+2}{2} + 2x_1 \geq 2^{n-2} + 3$.

Нека

$$z + x = \prod_{j=1}^l p_j^{a_j} \Rightarrow 5 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_l, \max \{a_1, a_2, \dots, a_l\} \leq n_1 - 1.$$

Също така $y \equiv 0 \pmod{p_1 p_2 \dots p_l}$ и

$$z \equiv -x \pmod{\prod_{j=1}^l p_j^{a_j}}$$

Аналогично доказваме, че

$$0 \equiv z^{2(n_1-1)} + z^{2(n_1-2)}x^2 + \dots + z^2x^{2(n_1-2)} + x^{2(n_1-1)} \equiv n_1 x^{2(n_1-1)} \pmod{\prod_{j=1}^l p_j^{a_j}}$$

От $\gcd(x, y) = 1$, $p_1 p_2 \dots p_l | y \Rightarrow p_1 p_2 \dots p_l$ не дели x . Тогава

$$n_1 \equiv 0 \pmod{\prod_{j=1}^l p_j^{a_j}} \Rightarrow 2^{2n_1-2} + 3 \leq z + x = \prod_{j=1}^l p_j^{a_j} \leq n_1 \Rightarrow 4^{n_1-1} + 3 \leq n_1,$$

което е невъзможно. Доказателството е завършено.