Задача 1.

а) Решете уравнението

$$\frac{6}{x^2-1}+\frac{3}{x+1}+\frac{x+1}{1-x}=0$$

б) Решете уравнението

$$\cos x = \cos 2x$$

в) Решете неравенството

$$\log_{\frac{1}{2}}(5x+10) > \log_{\frac{1}{2}}(x^2+6x+8)$$

Задача 2.

а) Намерете най-голямата стойност на функцията

$$f(x) = 4^{2x-x^2-2}$$

б) Намерете стойностите на реалния параметър a, за които съществува x такова, че числата 3, $a4^{2x-x^2-2}$ и 16^{2x-x^2-2}, взети в този ред, образуват аритметична прогресия.

Задача 3. Даден е правоъгълен ΔABC с $\sphericalangle C = 90°$, $AC = 3$ и радиус на вписаната окръжност $r = 1$. Намерете:

а) радиуса на описаната около ΔABC окръжност.

б) лицето на ΔBMC, където M е точката, в която продължението на ъглополовящата CL, $L \in AB$, пресича описаната около ΔABC окръжност.

Задача 4. Даден е правоъгълен трапец $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$, в който може да се впише окръжност. Разстоянията от центъра на вписаната окръжност до върховете A и B са съответно равни на $3\sqrt{2}$ и 5.

а) Намерете страните и лицето на трапеца.

б) Нека $MABCD$ е пирамида с основа дадения трапец, за която ръбът $MD = 8$ е перпендикулярен на основата. Намерете лицето на околната повърхнина на пирамидата.

КРАТКИ РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ

Решение на задача 1.

а) За дефиниционното множество на израза намираме ДМ: $x \neq \pm 1$. Преобразуваме

$$\frac{6}{x^2-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}=0 \Leftrightarrow \frac{6+3(x-1)-(x+1)^2}{x^2-1}=0$$

$$x^2+3(x-1)-(x+1)^2=0$$

Получаваме квадратното уравнение

$$x^2-x-2=0$$

с решения $x_1=2$ и $x_2=-1$. Решението $x_2=-1$ не принадлежи на ДМ. Следователно даденото уравнение има единствено решение $x=2$.

б) Преобразуваме

$$\cos x=\cos 2x \Leftrightarrow \cos x = 2\cos^2 x-1$$

$$2\cos^2 x-\cos x-1=0$$

което има решения

$$\cos x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

и

$$\cos x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

в) За дефиниционното множество намираме

$$\text{ДМ: }\left|\begin{array}{c}5x+10>0\\ x^2+6x+8>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c}x>-2\\ x\in(-\infty,-4)\cup(-2,\infty)\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-2,\infty)$$

Даденото неравенство се свежда до

$$5x+10<x^2+6x+8$$

$$x^2+x-2>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(1,\infty)$$

което, заедно с дефиниционното множество, дава следните решения

$$x\in(1,\infty)$$

Решение на задача 2. **а**) Най-голямата стойност на дадената функция $f(x)$ се достига за $x=1$, когато функцията $g(x)=2x-x^2-2$ достига най-голяма стойност. Следователно

$$f_{\text{нгс}}=f(1)=4^{-1}=\frac{1}{4}$$

б) От условието и свойство на аритметична прогресия следва

$$2a4^{2x-x^2-2}=3+16^{2x-x^2-2}$$

откъдето след полагане $t=4^{2x-x^2-2}$ получаваме уравнението

$$2at=3+t^2$$

с условие $0<t\leq 1/4$. Полагаме

$$\varphi(t)=t^2-2at+3, \mathcal{D}=4a^2-12$$

Минимумът на $\varphi(t)$ се достига при $t=a$. Търсим корени $t_1\leq t_2$ на квадратното уравнение $\varphi(t)=0$ от интервала $(0,1/4]$, което означава

$$\left|\begin{array}{c}\mathcal{D}>0\\ t_1<0<t_2\leq 1/4\end{array}\right. \cup \left|\begin{array}{c}\mathcal{D}\geq 0\\ 0<t_1\leq t_2\leq 1/4\end{array}\right. \cup \left|\begin{array}{c}\mathcal{D}\geq 0\\ 0<t_1\leq 1/4\leq t_2\end{array}\right.$$

следователно

$$\left|\begin{array}{c}4a^2-12>0\\ \varphi(0)<0\\ \varphi(1/4)\geq 0\end{array}\right. \cup \left|\begin{array}{c}4a^2-12\geq 0\\ \varphi(0)>0\\ \varphi(1/4)\geq 0\\ 0<a<1/4\end{array}\right. \cup \left|\begin{array}{c}4a^2-12\geq 0\\ \varphi(0)>0\\ \varphi(1/4)\leq 0\\ a>0\end{array}\right.$$

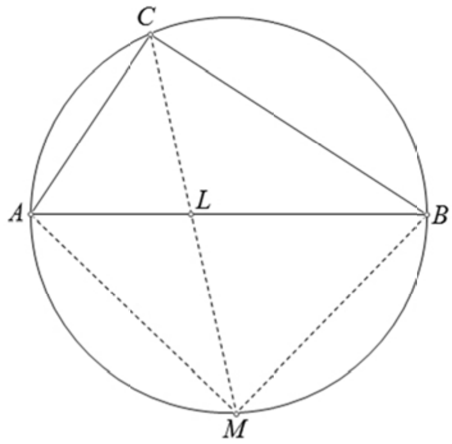
$$\left|\begin{array}{c}a\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\infty)\\ 3<0\\ \varphi(1/4)\geq 0\end{array}\right. \cup \left|\begin{array}{c}a\in(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},\infty)\\ 3>0\\ 1/16-a/2+3\geq 0\\ 0<a<1/4\end{array}\right. \cup \left|\begin{array}{c}a\in(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},\infty)\\ 3>0\\ 1/16-a/2+3\leq 0\\ a>0\end{array}\right.$$

В първия и втория случай очевидно няма решения. От третия случай получаваме

$$a \in \left[\frac{49}{8}, \infty\right)$$

което задава търсеното множеството на стойности на параметъра a.

Решение на задача 3. **а)** ΔAMB е равнобедрен правоъгълен



фигура 1

По свойствата на правоъгълен триъгълник

$$AC + BC - AB = 2r$$
$$3 + BC - AB = 2$$
$$BC = AB - 1$$
$$3^2 + (AB - 1)^2 = AB^2$$

следователно $AB = 5$ и $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 4$

За радиуса R на описаната окръжност имаме

$$2R = AB, 2R = 5$$

следователно $R = 5/2$.

б) По синусовата теорема

$$\frac{MB}{\sin\sphericalangle 45^\circ} = \frac{CB}{\sin\sphericalangle BAC}$$

$$MB = \sin\sphericalangle 45^\circ \frac{CB}{\sin\sphericalangle BAC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{4/5} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Преобразуваме последователно

$$S_{\Delta BMC} = \frac{MB \cdot BC \cdot \sin\sphericalangle MBC}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4\sin(45^\circ + \sphericalangle ABC)}{2}$$
$$S_{\Delta BMC} = 5\sqrt{2}(\sin 45^\circ \cos\sphericalangle ABC + \cos 45^\circ \sin\sphericalangle ABC)$$

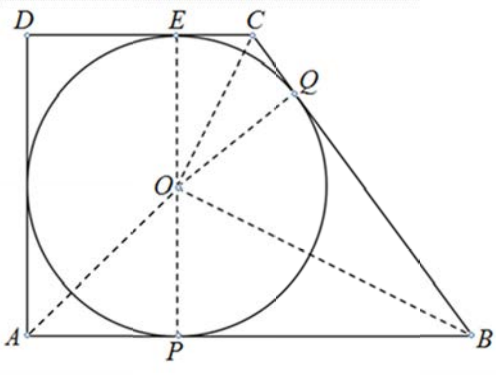
От правоъгълния ΔABC имаме

$$\sin\sphericalangle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}, \cos\sphericalangle ABC = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$$

следователно

$$S_{\Delta BMC} = 5\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{3}{5}\right), S_{\Delta BMC} = 7$$

Решение на задача 4. **а)**



фигура 2

Нека r е радиусът на вписаната окръжност. ΔAPO е правоъгълен, $\sphericalangle APO = 90^\circ$, и равнобедрен

$$OA^2 = AP^2 + OP^2 = 2r^2$$
$$\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 2r^2, r = 3$$

От правоъгълния ΔOPB, $\sphericalangle OPB = 90^\circ$, имаме

$$OB^2 = OP^2 + PB^2, 25 = 9 + PB^2$$
$$PB = 4 \Rightarrow AB = 4 + 3 = 7$$

От правоъгълния ΔBOC, $\sphericalangle BOC = 90^\circ$, имаме $OQ^2 = BQ \cdot QC \Rightarrow 3^2 = 4QC$

$$QC = CE = \frac{9}{4} \Rightarrow DC = 3 + \frac{9}{4} = \frac{21}{4}$$

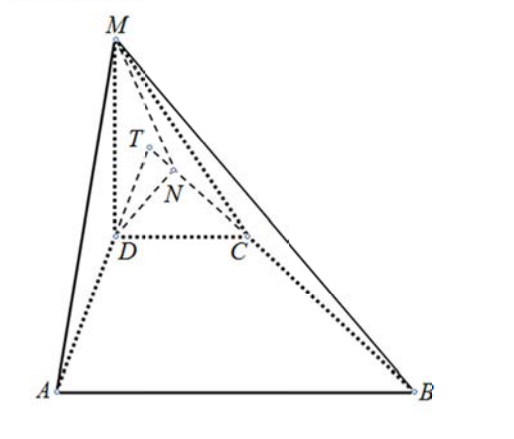
$$BC = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$

Следователно

$$S_{ABCD} = \frac{7 + 21/4}{2} 6 = \frac{147}{4}$$

б) За околната повърхнина имаме

$$S_{\text{ок}} = S_{\Delta ADM} + S_{\Delta ABM} + S_{\Delta DCM} + S_{\Delta BCM}$$



фигура 3

$$S_{\Delta ADM} = \frac{AD \cdot MD}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$$

$$S_{\Delta DCM} = \frac{DC \cdot DM}{2} = \frac{8 \cdot 21/4}{2} = 21$$

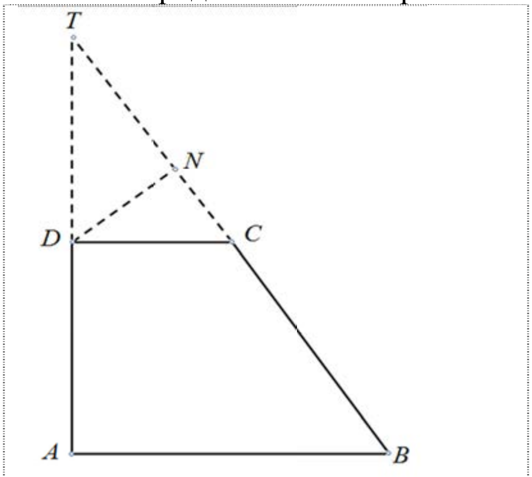
$$AM^2 = AD^2 + MD^2 \Rightarrow AM^2 = 8^2 + 6^2 = 100$$

$$AM = 10$$

Триъгълникът ΔABM също е правоъгълен, $\sphericalangle BAM = 90°$, следователно

$$S_{\Delta ABM} = \frac{7 \cdot 10}{2} = 35$$

Спускаме перпендикуляр MN към продължението на ръба BC. Нека T е пресечната точка на продълженията на ръбовете AD и BC.



фигура 4

$$\Delta ABT \sim \Delta DCT$$

$$\frac{7}{21/4} = \frac{BT}{CT} = \frac{BT}{BT - 25/4}$$

$$BT = 25$$

$$\frac{7}{21/4} = \frac{AT}{DT} = \frac{AT}{AT - 6}$$

$$AT = 24$$

От правоъгълния ΔDCT, $\sphericalangle CDT = 90°$, имаме

$$CT \cdot DN = DC \cdot DT$$

$$CT = BT - BC = 25 - \frac{25}{4} = \frac{75}{4}$$

$$DT = AT - AD = 24 - 6 = 18$$

Следователно

$$\frac{75}{4} DN = \frac{21}{4} \cdot 18$$

$$DN = \frac{7 \cdot 18}{25}$$

$$MN^2 = MD^2 + DN^2 \Rightarrow MN^2 = 64 + \left(\frac{7 \cdot 18}{25}\right)^2$$

$$MN = \sqrt{64 + \left(\frac{7 \cdot 18}{25}\right)^2}$$

откъдето намираме

$$S_{\Delta BCM} = \frac{BC \cdot MN}{2} = \frac{25}{4} \cdot \frac{2\sqrt{13969}}{25 \cdot 2} = \frac{\sqrt{13969}}{4}$$

Следователно

$$S_{\text{ок}} = S_{\Delta ADM} + S_{\Delta ABM} + S_{\Delta DCM} + S_{\Delta BCM} = 24 + 35 + 21 + \frac{\sqrt{13969}}{4} = 90 + \frac{\sqrt{13969}}{4}$$

Критерии за оценка

1	Пълно решение на задача 1а	1т.
2	Пълно решение на задача 1б	1т.
3	Пълно решение на задача 1в	2т.
4	Пълно решение на задача 2а	2т.
5	Пълно решение на задача 2б	2т.
6	Пълно решение на задача 3а	2т.
7	Пълно решение на задача 3б	2т.
8	Пълно решение на задача 4а	2т.
9	Пълно решение на задача 4б	2т.

Всичко 16 точки

оценка от един проверяващ $= 2 + 0{,}25 \cdot T$

където T е сборът от получените точки