ПЪРВИ ПРЕДВАРИТЕЛЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

УАСГ
6-ти Април 2014 г.

Вариант 2- ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

Задача 1. (1 т.) Най – малкото цяло число от дефиниционната област на функцията $f(x)=\lg\left(16^x-\frac{1}{8}\right)$ е

а) -2; б) -1; в) 0; г) 1.

Изразът $\lg F$ е дефиниран за F>0. Значи трябва да е изпълнено $16^x-\frac{1}{8}>0$. Тъй като $\frac{1}{8}=16^{-\frac{3}{4}}$, то от последното неравенство следва, че $16^x>16^{-\frac{3}{4}}$, значи $x>-\frac{3}{4}$ и най – малкото цяло число е нула.

Разбира се може да се провери за предложените стойности на x - отново ще се получи $x=0$. Такова разсъждение е „псевдодоказателство” (защо?) и въпреки това се признава за решение. **Отг. (0)**

Задача 2. (1 т.) Ъгълът между допирателната към графиката на функцията $y=\sqrt{x}$ в точката $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ и положителната посока на оста Ox е равен на

а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 135°. **Отг. (**45°**)**

Задача 3. (1 т.) Числата $a_1,a_2,\ldots$ образуват аритметична прогресия, при което $a_4=7$ и $a_7=4$. Първият член a_1 е равен на

а) -4; б) 10; в) 14; г) -7. **Отг. (10)**

Задача 4. (1 т.) Ако $x_{1,2}$ са корените на уравнението $2^{2x}-5.2^x+4=0$, то стойността на израза $x_1+x_2-x_1x_2$ е

а) 1; б) 2; в) -9; г) -2. **Отг. (2)**

Задача 5. (1 т.) В равнобедрен трапец с дължини на основите 20 и 10 може да се впише окръжност. Радиусът на тази окръжност е равен на

а) $5\sqrt{2}$; б) 5; в) 10; г) $10\sqrt{2}$. **Отг.** $\left(5\sqrt{2}\right)$

Задача 6. Дадено е уравнението $x^3-3x+1=0$.

а) (2 т.) Докажете, че числото $x_1=2\cos\frac{2\pi}{9}$ е негов корен.

б) (1 т.) Използвайте, че $x^3-3x+1=\left(x-x_1\right)P(x)$, където *P(x)* е полином от втора степен, за да докажете, че произведението на корените на уравнението $x^3-3x+1=0$ е равно на -1

в) (2 т.) Докажете, че $\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}\cos\frac{14\pi}{9}=-\frac{1}{8}$.

Решение: а) Използваме популярната зависимост $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$. Сега да положим $x=2\cos\frac{2\pi}{9}$ в израза x^3-3x+1; получава се

$$\left(2\cos\frac{2\pi}{9}\right)^3-3.\left(2\cos\frac{2\pi}{9}\right)+1=8\cos^3\frac{2\pi}{9}-6\cos\frac{2\pi}{9}+1=2\left(4\cos^3\frac{2\pi}{9}-3\cos\frac{2\pi}{9}\right)+1=$$

$2\cos\left(3.\frac{2\pi}{9}\right)+1=2\cos\frac{2\pi}{3}+1=0$, което решава първата част от задачата (защото $\cos\frac{2\pi}{3}=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$; това го пише в таблиците).

б) Да положим $f(x)=x^3-3x+1$. От подусловието а) следва, че $f\left(x_1\right)=0$, ако $x_1=\cos\frac{2\pi}{3}$. Значи $f(x)=f(x)-f\left(x_1\right)=x^3-3x+1-\left(x_1^{\ 3}-3x_1+1\right)=x^3-x_1^3-3\left(x-x_1\right)$. И така $f(x)=\left(x-x_1\right)\left(x^2+x_1x+x_1^2-3\right)$, тоест $P(x)=x^2+x_1x+x_1^2-3$. Да напомним, че ако $x_{2,3}$ са корени на ax^2+bx+c, то $ax^2+bx+c=a\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)$. Тъй като дискриминантата на *P* е положителна (проверете това), то *P* има два *различни* корена – да ги означим с x_2 и x_3. Тогава $P(x)=\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)$. Окончателно получаваме $x^3-3x+1=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)$.

Нека сега да разкрием скобите на произведението в дясната част на горното равенство: получава се $x^3-3x+1=x^3-\left(x_1+x_2+x_3\right)x^2+\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)x-x_1x_2x_3$. От това следва, че $-x_1x_2x_3=1$.

в) Както в подусловие а), лесно се проверява, че числата $x_2=2\cos\frac{8\pi}{9}$ и $x_3=2\cos\frac{14\pi}{9}$ са корени на x^3-3x+1. От б) следва, че $2\cos\frac{2\pi}{9}.2\cos\frac{8\pi}{9}.2\cos\frac{14\pi}{9}=-1$.

Забележка: Разбира се тъждеството $\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}\cos\frac{14\pi}{9}=-\frac{1}{8}$ може да се докаже и по други начини – например може да го умножим с $2\sin\frac{2\pi}{9}\neq 0$ и да продължим в същата посока. Идеята да се използват корените на x^3-3x+1 за получаване на тригонометрични тъждества оправдава в известен смисъл подхода в тази задача; забележете, че от б) следват също така тъждествата $\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}+\cos\frac{14\pi}{9}=0$ и (не толкова очевидното)

$$\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}\cos\frac{14\pi}{9}+\cos\frac{14\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}=-\frac{3}{8}.$$

Задача 7. В триъгълника ABC е вписана окръжност к с радиус 1. Допирателната към к, успоредна на BC, пресича страните AB и AC съответно в точките K и M.

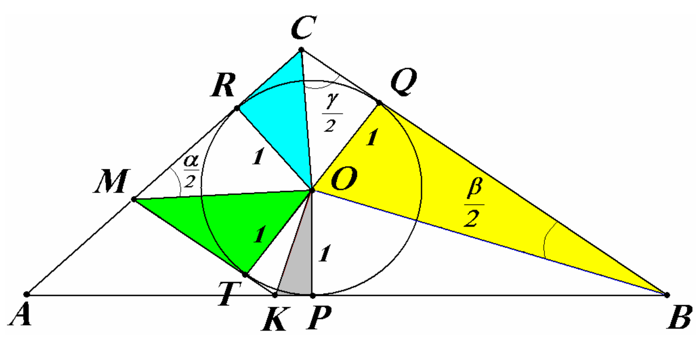
а) (3 т.) Да означим с α и β ъглите при върховете A и B. Докажете, че лицето на трапеца $BCMK$ е равно на

$$\frac{2}{\sin\beta}+\frac{2}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

б) (2 т.) На колко е равен ъгълът β, ако $\alpha=\frac{\pi}{2}$ и S_{BCMK} е минимално?

Решение: Ще изложим решение, което е напълно законно и по наше мнение по – рационално от „стандартния" подход. И така, да допуснем, че подусловие а) е доказано. Тогава $S_{BCMK}=\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}=\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\cos\beta}$, защото $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\cos\beta$. Да напомним след това известното неравенство $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ (равенство се достига само ако a=b), което може да се намери в таблиците, препоръчвани от УАСГ (и, разбира се, е в сила за положителни a и b). От него следва, че $\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\cos\beta}\geq\frac{2}{\sqrt{\sin\beta\cos\beta}}$, при което равенство се достига само в случая $\sin\beta=\cos\beta$, тоест за $\beta=45^\circ$ (в този случай $S_{BCMK}=2\sqrt{2}$).

а) Да разгледаме например триъгълника OBQ, изобразен на следващата рисунка. Той е правоъгълен, $\sphericalangle OBQ=\frac{\beta}{2}$ и OQ=1. Значи $\frac{BQ}{1}=\operatorname{cotan}\frac{\beta}{2}$; $BQ=\operatorname{cotan}\frac{\beta}{2}$. От тук следва, че $S_{BOQ}=\frac{1}{2}\operatorname{cotan}\frac{\beta}{2}$.



От горната рисунка се вижда, че трапецаът *BKMC* е “сглобен” от четири двойки еднакви триъгълници. По един представител от всяка двойка е оцветен. Ако положим сега $\sphericalangle ACB = \gamma$ и съобразим, че $\sphericalangle BKM = \pi - \gamma$ и $\sphericalangle KMC = \pi - \beta$, то се получава $S_{BCMK} = 2S_{OQB} + 2S_{OPK} + 2S_{OTM} + 2S_{ORC}$;

$S_{BCMK} = \operatorname{cotan}\dfrac{\beta}{2} + \operatorname{cotan}\dfrac{\pi-\gamma}{2} + \operatorname{cotan}\dfrac{\pi-\beta}{2} + \operatorname{cotan}\dfrac{\gamma}{2}$;

$S_{BCMK} = \operatorname{cotan}\dfrac{\beta}{2} + \tan\dfrac{\beta}{2} + \operatorname{cotan}\dfrac{\gamma}{2} + \tan\dfrac{\gamma}{2}$. Да отбележим след това, че $\gamma = \pi - (\alpha+\beta)$ и за всеки ъгъл φ

$\operatorname{cotan}\varphi + \tan\varphi = \dfrac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \dfrac{1}{\sin\varphi\cos\varphi} = \dfrac{2}{\sin 2\varphi}$. Значи

$S_{BCMK} = \dfrac{2}{\sin\beta} + \dfrac{2}{\sin\gamma} = \dfrac{2}{\sin\beta} + \dfrac{2}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Задача 8. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб *a.* Точките *M*, *N* и *P* са от ръбовете *AB, AD* и BB_1, като *AM=2MB*, *AN=ND* и $B_1P=4PB$.

а) (3 т.) Докажете, че ъгълът между основата (*ABCD*) и равнината (*MNP*) е 45°.

б) (2 т.) Пресметнете разстоянието от върха *B* до равнината (*MNP*).

Решение: Нека $(NM)\cap(BC) = T$. Тогава $\Delta AMN \sim \Delta TBM \Rightarrow \dfrac{BT}{AN} = \dfrac{MB}{AM}$, т.е. $BT = \dfrac{AN}{2} = \dfrac{a}{4}$. Разглеждаме тетраедъра *TBMP*.

а) Двустенният ъгъл между основата и (MPN) е равен на двустенния ъгъл при ръба *MT* в тетраедъра *TBMP*.

Нека $BZ \perp MT$ и $Z \in (MT)$. От теоремата за трите перпендикуляра следва, че $PZ \perp MT$ и значи $\sphericalangle BZP$ е търсеният ъгъл.

$$BZ = \frac{BT.BM}{TM}, \quad MT = \sqrt{BT^2 + BN^2} = \sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{16}} = \frac{5a}{12}.$$

Тогава $BZ = \dfrac{a}{4}\dfrac{a}{5}\dfrac{12}{5a} = \dfrac{a}{5} = BP$. Следователно $\tan\sphericalangle BZP = 1 \Rightarrow \sphericalangle BZP = 45^\circ$.

б) Разстоянието от В до (MNP) е равно на дължината на височината h_B през върха *B* на тетраедъра *TBMP*. Намираме последователно $V_{TBMP} = \dfrac{1}{6}BT.BM.BP = \dfrac{a^3}{360}$ и $S_{\Delta TMP} = \dfrac{S_{\Delta TBM}}{\cos 45^\circ} = \dfrac{TB.TM}{2}\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{a}{3}\dfrac{a}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{24}$. Тогава $h_B = \dfrac{3V_{TBMP}}{S_{\Delta TBP}} = \dfrac{24\sqrt{2}a^3}{240a^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{10}$, което е търсеното разстояние.

Забележка: Задачата може да бъде решена чрез разглеждане на тетраедъра $QTCC_1$.