МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

Зимен математически турнир "Атанас Радев"
28 – 29 януари 2012 г., ЯМБОЛ

Тема за 8 клас

Задача 1. Във футболно първенство всеки отбор играе два пъти с всеки от останалите отбори. След приключване на първенството се оказало, че всички отбори са събрали общо 363 точки и 25% от срещите са завършили наравно. Колко отбора участват в това футболно първенство? (Победителят получава 3 т., победеният 0 т., а за равен мач двата отбора получават по 1 т.)

Задача 2. Даден е ΔABC и вътрешна точка M, за която $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MBC = 30^0$. Ако P и Q са петите на перпендикулярите, спуснати от M съответно към страните BC и AC, а D е средата на страната AB, да се докаже, че ΔPQD е равностранен.

Задача 3. Нека $f(x) = x^2 + ax + b$, където a и b са такива цели числа, че $|a| \leq 5$ и $|b| \leq 5$. Ако $|f(1+\sqrt{2})| \leq 0,02$, да се пресметне $f(1-\sqrt{2})$.

Задача 4. В единичните квадратчета на квадратна таблица 3×3 се записват 9 различни естествени числа със сума S. Таблицата се нарича "интересна", ако при задраскване на кой да е ред и стълб сумата на две от срещуположните по диагонал числа е равна на сумата на другите две срещуположни по диагонал числа.

а) Да се докаже, че при $S = 2012$ не съществува интересна таблица.

б) Да се намери броят на различните интересни таблици, които съдържат числата 1, 2, 3, 5, 666 и за които S е възможно най-малко. (Две таблици са различни, ако не се получават една от друга чрез въртене около центъра на таблицата.)

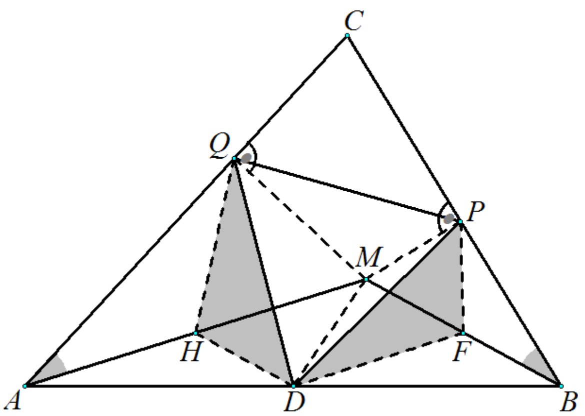
Време за работа 4 часа 30 мин.
Журито Ви желае успешна работа!

Тема за 8 клас

Задача 8.1. Във футболно първенство всеки отбор играе два пъти с всеки от останалите отбори. След приключване на първенството се оказало, че всички отбори са събрали общо 363 точки и 25% от срещите са завършили наравно. Колко отбора участват в това футболно първенство? (Победителят получава 3 т., победеният 0 т., а за равен мач двата отбора получават по 1 т.)

Решение: Нека в групата участват x отбора. Тогава общият брой на изиграните срещи е $x(x-1)$. **(2 т.)** При равенство се разпределят 2 т., т.е. от равните мачове се получават общо $2.\frac{1}{4}x(x-1)$ точки. **(2 т.)** От останалите мачове се получават $3.\frac{3}{4}x(x-1)$ точки. **(1 т.)** Получаваме уравнението $3.\frac{3}{4}x(x-1)+2.\frac{1}{4}x(x-1)=363$. **(1 т.)** Корените на уравнението $11x^2-11x-4.363=0$ са $x_1=12$ и $x_2=-11$. Следователно в групата участват 12 отбора. **(1 т.)**

Задача 8.2. Даден е ΔABC и вътрешна точка M, за която $\sphericalangle MAC=\sphericalangle MBC=30^0$. Ако P и Q са петите на перпендикулярите, спуснати от M съответно към страните BC и AC, а D е средата на страната AB, да се докаже, че ΔPQD е равностранен.



Решение: Нека H и F са средите съответно на AM и BM. Тогава $DH=\frac{1}{2}BM$ и $DF=\frac{1}{2}AM$ (средни отсечки). **(1 т.)** Имаме още, че $HDFM$ е успоредник и следователно $\sphericalangle HDF=180^0-\sphericalangle DHM$ **(1 т.)**, което ще използваме по-долу. Освен това $QH=\frac{1}{2}AM$ и $PF=\frac{1}{2}BM$ (медиани в правоъгълни триъгълници). **(1 т.)** Разглеждаме ΔDHQ и ΔPFD. Последователно използваме, че $DH=PF$, $QH=DF$ **(1 т.)** и

$\sphericalangle DHQ=\sphericalangle DHM+60^0=\sphericalangle DFM+60^0=\sphericalangle PFD$. **(1 т.)** Оттук $\Delta DHQ\cong\Delta PFD$ и следователно $DP=DQ$. **(1 т.)** Освен това $\sphericalangle HQD=\sphericalangle FDP$. Получаваме, че:

$$\sphericalangle QDP=\sphericalangle HDF-(\sphericalangle HDQ+\sphericalangle FDP)=\sphericalangle HDF-(\sphericalangle HDQ+\sphericalangle HQD)=\sphericalangle HDF-(180^0-\sphericalangle DHQ)=$$
$$=\sphericalangle HDF-(180^0-\sphericalangle DHM-60^0)=\sphericalangle HDF-(180^0-(180^0-\sphericalangle HDF)-60^0)=60^0$$ **(1 т.)**,

което е достатъчно, за да твърдим, че ΔPQD е равностранен.

Забележка. ΔPQD е равнобедрен и в случая $\sphericalangle MAC=\sphericalangle MBC\neq 30^0$.

Задача 8.3. Нека $f(x)=x^2+ax+b$, където a и b са такива цели числа, че $|a|\leq 5$ и $|b|\leq 5$. Ако $|f(1+\sqrt{2})|\leq 0{,}02$, да се пресметне $f(1-\sqrt{2})$.

Решение: Нека $f(1+\sqrt{2})=m+n\sqrt{2}$, където $m=3+a+b$ и $n=a+2$. **(1 т.)** От условието получаваме, че $|m|=|3+a+b|\le 3+|a|+|b|\le 13$ и $|n|=|a+2|\le 2+|a|\le 7$. **(1 т.)** От друга страна $|f(1+\sqrt{2})|=|m+n\sqrt{2}|=\dfrac{|m^2-2n^2|}{|m-n\sqrt{2}|}$. **(2 т.)** Ако m и n не са едновременно равни на нула, то $|m^2-2n^2|\ge 1$ (m и n са цели числа) и следователно $|f(1+\sqrt{2})|\ge \dfrac{1}{|m-n\sqrt{2}|}$. От $|m|\le 13$ и $|n|\le 7$ следва, че $|m-n\sqrt{2}|\le|m|+|n|\sqrt{2}\le 13+7\sqrt{2}<13+7.2=27$ **(2 т.)** и следователно $|f(1+\sqrt{2})|>\dfrac{1}{27}>\dfrac{1}{50}=0,02$, което противоречи на условието. Следователно $m=n=0$, откъдето получаваме $a=-2$ и $b=-1$, т.е. $f(x)=x^2-2x-1$ и следователно $f(1-\sqrt{2})=0$. **(1 т.)**

Задача 8.4. В единичните квадратчета на квадратна таблица 3×3 се записват 9 различни естествени числа със сума S. Таблицата се нарича "интересна", ако при задраскване на кой да е ред и стълб сумата на две от срещуположните по диагонал числа е равна на сумата на другите две срещуположни по диагонал числа.

а) Да се докаже, че при $S=2012$ не съществува интересна таблица.

б) Да се намери броят на различните интересни таблици, които съдържат числата 1, 2, 3, 5, 666 и за които S е възможно най-малко. (Две таблици са различни, ако не се получават една от друга чрез въртене около центъра на таблицата.)

Решение: а) Да разгледаме една интересна таблица:

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Като зачертаем втория ред и втория стълб, от условието имаме $a_1+a_9=a_3+a_7$ и като прибавим към двете страни a_5, получаваме $a_1+a_5+a_9=a_3+a_5+a_7$, т.е. сборът на числата по всеки от диагоналите е един и същ. **(1 т.)** Нека той е a. Сега да задраскаме третия ред и третия стълб. Получаваме $a_1+a_5=a_2+a_4=a-a_9$, т.е. $a_2+a_4+a_9=a$. По подобен начин, като задраскаме първия ред и първия стълб, имаме $a_6+a_8=a_5+a_9=a-a_1$, т.е. $a_6+a_8+a_1=a$. **(1 т.)** Тогава

$$S=(a_2+a_4+a_9)+(a_6+a_8+a_1)+(a_3+a_5+a_7)=3a. \textbf{ (1 т.)}$$

Тъй като числото 2012 не се дели на 3, то интересна таблица с $S=2012$ не съществува.

б) Ще използваме означенията от а). Тъй като търсим интересна таблица с възможно най-малко S, свеждаме задачата до намиране на най-малката стойност на a, където a е някоя от разгледаните суми в а). Естествено е да работим с числата 1 и 666. Можем да считаме, че $a_1=1$ и $a_9=666$. Тогава задачата се свежда до намиране на най-малката възможна стойност на a_5. От условието $a_1+a_5=a_2+a_4$ следва, че $a_5\ne 2$ и $a_5\ne 3$. Ще докажем, че съществува интересна таблица с $a_5=4$. За нея $S=3.(1+4+666)=3.671=2013$. Освен това е ясно, че в този случай $a_2=2$ и $a_4=3$ или обратно, т.е. $a_2 = 3$ и $a_4 = 2$. За числото 5 има две възможности: при първата $a_6 = 5$ или $a_8 = 5$, а при втората числото 5 е в ъглово единично квадратче на таблицата, т.е. $a_3 = 5$ или $a_7 = 5$. Първата възможност се отхвърля с непосредствена проверка, а при втората получаваме следните две таблици: **(2 т.)**

1	2	5
3	4	7
662	663	666

1	2	662
3	4	664
5	6	666

В а) доказахме, че $a_1 + a_5 + a_9 = a_3 + a_5 + a_7 = a_2 + a_4 + a_9 = a_6 + a_8 + a_1 = a$. По начин, подобен на този за доказване на тези четири равенства, може да се установи още, че $a_2 + a_6 + a_7 = a$ и $a_4 + a_8 + a_3 = a$. Така, получаваме 6 суми, във всяка от които има по един представител на всеки ред и всеки стълб на таблицата. Оттук следва, че от всяка от горните 2 таблици можем да получим 9 таблици в зависимост от числото в центъра на таблицата, за което има общо 9 възможности. На всяка от тези 9 таблици съответства по една, която се получава чрез размяна на числата в ъглите на единия от диагоналите. Останалите размествания не водят до различни таблици. Следователно общият брой на различните интересни таблици е $9.2 + 9.2 = 36$. **(2 т. = 1 т. за 18-те варианта на първата от показаните по-горе 2 таблици + 1 т. за 18-те варианта на втората)**

Задачите са предложени от Теодоси Витанов (8.1. и 8.2.), Симеон Замковой (8.3.) и Сава Гроздев (8.4.).

Министерство на Образованието, Младежта и Науката
Съюз на Математиците в България

Математически Турнир „Атанас Радев“
Ямбол, 27–29 януари 2012 г.

Тема за 9. клас

Задача 1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението $x^2 + (a-2)(a-3)x + a^3 - 4a + 9 = 0$ има два различни реални корена x_1 и x_2, такива че

$$a(x_1 + x_2) = \frac{18}{x_1} + \frac{18}{x_2}.$$

Задача 2. В остроъгълния $\triangle ABC$ отсечките AA_1 ($A_1 \in BC$) и BB_1 ($B_1 \in AC$) са височини, а точката M е средата на страната AB. Триъгълникът A_1B_1M е правоъгълен и лицето му е равно на 2. Да се намерят:

а) дължината на страната AB и големината на $\sphericalangle ACB$;

б) дължината на радиуса на окръжността, описана около $\triangle A_1B_1C$.

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа n, за които $8f(n^2) = 27f(n)$, където с $f(n)$ е означен броят на всички различни естествени делители на n.

Задача 4. Дадени са реалните числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$. Да се докаже, че тези числа могат да се разделят на две множества A и B от по n числа всяко, така че разликата на сумите $S(A)$ и $S(B)$ на числата в множествата да удовлетворява

$$|S(A) - S(B)| \le \max_{1\le i<2n} |x_{i+1} - x_i|.$$

Време за работа: 4.5 часа

Министерство на Образованието, Младежта и Науката
Съюз на Математиците в България

Математически Турнир „Атанас Радев“
Ямбол, 27–29 януари 2012 г.

Тема за 10. клас

Задача 1. Да се реши неравенството

$$\sqrt{3-2^x} \leqq 3-4^x.$$

Задача 2. Даден е квадратният тричлен $f(x) = x^2 + 2x + b$, където b е реален параметър. Да се намерят всички стойности на b, за които уравнението $f(f(x)) = 0$ има точно три различни реални корена.

Задача 3. Даден е $\triangle ABC$ с ортоцентър H и медицентър G. Ако G лежи на окръжността с диаметър CH, то

а) да се докаже, че точките A, B, G и H лежат на една окръжност;

б) да се намери най-голямата възможна стойност на $\sphericalangle ACB$.

Задача 4. Дадени са реалните числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$. Да се докаже, че тези числа могат да се разделят на две множества A и B от по n числа всяко, така че разликата на сумите $S(A)$ и $S(B)$ на числата в множествата да удовлетворява

$$|S(A) - S(B)| \leq \max_{1\leq i<2n} |x_{i+1} - x_i|.$$

Време за работа: 4.5 часа

Министерство на Образованието, Младежта и Науката
Съюз на Математиците в България

Математически Турнир „Атанас Радев“
Ямбол, 27–29 януари 2012 г.

<u>Тема за 11. клас</u>

Задача 1. Да се намерят всички цели стойности на реалния параметър a, за които съществува цяло, различно от нула число, което е решение на уравнението

$$a4^x + (a-1)9^x = (2a-1)6^x.$$

Задача 2. Даден е трапец $ABCD$, $AB \parallel CD$, за който $AD = 6$, $DC = 3$ и $BC = 12$. Ъглополовящата на $\measuredangle ABC$ пресича страната AD в точка M, като $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{5}{3}$.

а) Да се докаже, че в $ABCD$ може да се впише окръжност.

б) Да се намери дължината на отсечката OM, където O е центърът на вписаната в $ABCD$ окръжност.

Задача 3. В държава има 2012 града. Между някои от градовете са прекарани пътища, като от всеки град може да се стигне до всеки друг. Известно е, че ако два града са свързани с път, то общият брой пътища, излизащи от тези два града е нечетно число. Колко най-много са прекараните пътища?

Задача 4. Нека a, m и n са естествени числа, като a е четно и $m < n$. Да се докаже, че едно от числата

$$a^m + 1, a^{m+1} + 1, a^{m+2} + 1, \dots, a^n + 1$$

е взаимно просто с всяко от останалите числа.

Време за работа: 4.5 часа

Министерство на Образованието, Младежта и Науката
Съюз на Математиците в България

Математически Турнир „Атанас Радев“
Ямбол, 27–29 януари 2012 г.

<u>Тема за 12. клас</u>

Задача 1. Да се намерят всички естествени числа n, за които уравнението

$$\log_n(\sin \pi x) = \sin^2(\log_n x^\pi)$$

има решение в реални числа.

Задача 2. Да се намерят всички реални числа c такива, че редицата, дефинирана чрез равенствата $a_0 = 0$ и $a_{n+1} = a_n^2 + c$ при $n \geq 0$, е ограничена.

Задача 3. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, за който $AB = 2$, $AD = 3$ и $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$. Да се намерят дължините на страните BC и CD, ако е известно, че те са естествени числа.

Задача 4. Нека a, m и n са естествени числа, като a е четно и $m < n$. Да се докаже, че едно от числата

$$a^m + 1, a^{m+1} + 1, a^{m+2} + 1, \ldots, a^n + 1$$

е взаимно просто с всяко от останалите числа.

Време за работа: 4.5 часа

Министерство на Образованието, Младежта и Науката
Съюз на математиците в България

Математически турнир „Атанас Радев“

Ямбол, 27 – 29 януари 2012 г.

София, 2012 г.

Кратки решения на задачите

Задача 9.1 Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението $x^2 + (a-2)(a-3)x + a^3 - 4a + 9 = 0$ има два различни реални корена x_1 и x_2, такива че

$$a(x_1 + x_2) = \frac{18}{x_1} + \frac{18}{x_2}.$$

Решение. Равенството от условието е еквивалентно на $ax_1x_2(x_1 + x_2) = 18(x_1 + x_2)$. При $x_1 + x_2 = 0$ получаваме $a = 2$ или $a = 3$. При $x_1 + x_2 \neq 0$ имаме

$$a(a^3 - 4a + 9) = 18 \iff a^4 - 4a^2 + 9a - 18 = 0 \iff (a-2)(a+3)(a^2 - a + 3) = 0.$$

От последното намираме само $a = -3$ като нов кандидат за решение.

При $a = 2$ и $a = 3$ получаваме съответно уравненията $x^2 + 9 = 0$ и $x^2 + 24 = 0$, които нямат реални корени, а при $a = -3$ имаме уравнението $x^2 + 30x - 6 = 0$, което има два различни реални (ненулеви) корена. Следователно единственото решение е $a = -3$.

<u>**Оценяване.**</u> 1 т. за разделянето на случаите $x_1 + x_2 = 0$ и $x_1 + x_2 \neq 0$; 1 т. за отхвърляне на $a = 2$ и $a = 3$; 1 т. за получаване на уравнението $a^4 - 4a^2 + 9a - 18 = 0$; 2 т. за решаването му; 1 т. за проверка, че $a = -3$ е решение. Изследването на дискриминантата води до $a \leq 0$ или $a \geq 11$, за което се дава 1 т. (не се добавя към горните).

Задача 9.2. В остроъгълния $\triangle ABC$ отсечките AA_1 ($A_1 \in BC$) и BB_1 ($B_1 \in AC$) са височини, а точката M е средата на страната AB. Триъгълникът A_1B_1M е правоъгълен и лицето му е равно на 2. Да се намерят:

а) дължината на страната AB и големината на $\sphericalangle ACB$;

б) дължината на радиуса на окръжността, описана около $\triangle A_1B_1C$.

Решение. а) Тъй като A_1M и B_1M са медиани към хипотенузата AB в правоъгълните $\triangle AA_1B$ и $\triangle BB_1A$, то $A_1M = \frac{AB}{2} = B_1M$. Сега от условието следва, че $\sphericalangle A_1MB_1 = 90^\circ$. Освен това $\sphericalangle AB_1M = \sphericalangle B_1AM = \alpha$ и $\sphericalangle BA_1M = \sphericalangle A_1BM = \beta$. Имаме

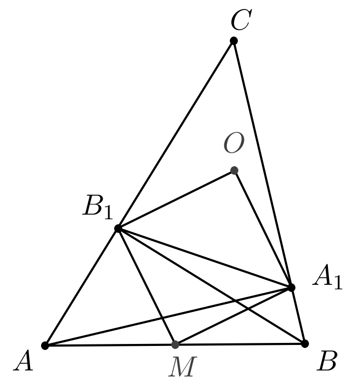
$$2 = S_{A_1B_1M} = \frac{A_1M.B_1M}{2} = \frac{AB^2}{8}$$

и следователно $AB^2 = 16$, т.е. $AB = 4$.

Освен това $\sphericalangle AMB_1 = 180^\circ - 2\alpha$ и $\sphericalangle BMA_1 = 180^\circ - 2\beta$, откъдето

$$90^\circ = \sphericalangle A_1MB_1 = 2\alpha + 2\beta - 180^\circ,$$

т.е. $\alpha + \beta = 135^\circ$ и следователно $\sphericalangle ACB = \gamma = 45^\circ$. б) Нека O и R са съответно центърът и радиусът на описаната около $\triangle A_1B_1C$ окръжност. Тогава $\sphericalangle A_1OB_1 = 2 \sphericalangle A_1CB_1 = 90^\circ$. Така $\triangle A_1OB_1$ и $\triangle A_1MB_1$ са равнобедрени правоъгълни с обща хипотенуза A_1B_1. Следователно тези триъгълници са еднакви и оттук $R = OA_1 = A_1M = \frac{AB}{2} = 2$.



Оценяване. 4 т. за а) (2 т. за $AB = 4$ и 2 т. за $\sphericalangle ACB = 45^\circ$); 2 т. за б).

Задача 9.3. Да се намерят всички естествени числа n, за които $8f(n^2) = 27f(n)$, където с $f(n)$ е означен броят на всички различни естествени делители на n.

Решение. Очевидно $n \neq 1$ и нека $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$ е каноничното разлагане на n. Тогава можем да запишем даденото равенство във вида

$$\frac{2\alpha_1+1}{\alpha_1+1}\cdot\frac{2\alpha_2+1}{\alpha_2+1}\cdots\frac{2\alpha_r+1}{\alpha_r+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^3. \tag{1}$$

Да отбележим, че $\frac{3}{2} \leq \frac{2\alpha_i+1}{\alpha_i+1} < 2$ за всяко α_i, като равенство отляво се достига само при $\alpha_i = 1$. Тогава от (1) следва, че $2^r > (\frac{3}{2})^3 \geq (\frac{3}{2})^r$, откъдето следва $2 \leq r \leq 3$.

При $r = 3$ имаме $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, което дава решенията $n = p_1p_2p_3$, където p_1, p_2 и p_3 са различни прости числа.

Нека $r = 2$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Тогава от (1) получаваме

$$\frac{2(2\alpha_2+1)}{\alpha_2+1} > \frac{2\alpha_1+1}{\alpha_1+1}\cdot\frac{2\alpha_2+1}{\alpha_2+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{2\alpha_1+1}{\alpha_1+1}\cdot\frac{2\alpha_2+1}{\alpha_2+1} \geq \left(\frac{2\alpha_2+1}{\alpha_2+1}\right)^2$$

(използвахме, че $\frac{2\alpha_1+1}{\alpha_1+1} \geq \frac{2\alpha_2+1}{\alpha_2+1}$ при $\alpha_1 \geq \alpha_2$). От тези неравенства лесно следва, че $3 \leq \alpha_2 \leq 5$. Във всеки от случаите $\alpha_2 = 3, 4, 5$ достигаме до линейно уравнение за α_1, като получаваме решенията $(\alpha_1, \alpha_2) = (13, 3)$ и $(7, 4)$, т.е. $n = p_1^{13}p_2^3$ и $n = p_1^7p_2^4$, където p_1 и p_2 са различни прости числа.

Оценяване. 1 т. за равенството (1); 2 т. за доказване на $2 \leq r \leq 3$; 1 т. за случая $r = 3$; 3 т. за случая $r = 2$.

Задача 9.4. Дадени са реалните числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$. Да се докаже, че тези числа могат да се разделят на две множества A и B от по n числа всяко, така че разликата на сумите $S(A)$ и $S(B)$ на числата в множествата да удовлетворява

$$|S(A) - S(B)| \leq \max_{1\leq i<2n} |x_{i+1} - x_i|.$$

Решение. *Първи начин.* Нека A е подмножество на $\{x_1, \ldots, x_{2n}\}$. Да означим със $S(A)$ сумата на числата от множеството A, а със $S(\overline{A})$ сумата на числата x_i, несъдържащи се в A.

Да построим редица $C_0, C_1, \ldots, C_{n^2}$ от n-елементни подмножества на $\{x_1, \ldots, x_{2n}\}$, в която $C_0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $C_{n^2} = \{x_{n+1}, \ldots, x_{2n}\}$, всеки две последователни n-орки имат точно $n-1$ общи елемента и се различават в елементи със съседни индекси. За всяко $i \in \{0, \ldots, n^2-1\}$ е изпълнено

$$S(C_{i+1}) - S(C_i) = |x_{k+1} - x_k|,$$

за някакъв индекс k.

Без ограничение на общността можем да приемем, че $S(C_0) - S(\overline{C_0}) < 0$. Тогава $S(C_{n^2}) - S(\overline{C}_{n^2}) > 0$ и съществува индекс j, за който

$$S(C_j) - S(\overline{C}_j) < 0 < S(C_{j+1}) - S(\overline{C}_{j+1}).$$

Очевидно за някакъв индекс k е изпълнено

$$|S(C_{j+1}) - S(C_j)| = |x_{k+1} - x_k|.$$

Отчитайки, че $S(C_{j+1}) - S(C_j) = S(\overline{C}_j) - S(\overline{C}_{j+1})$, получаваме

$$2|x_{k+1}-x_k| = |S(C_{j+1})-S(\overline{C}_{j+1})-S(C_j)+S(\overline{C}_j)| = |S(C_{j+1})-S(\overline{C}_{j+1})|+|S(\overline{C}_j)-S(C_j)|.$$

Следователно поне едно от двете събираеми не надхвърля

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \max_{1\leq i<2n} |x_{i+1} - x_i|.$$

Втори начин (А. Иванов). Ще докажем твърдението с индукция по n. При $n = 1$ твърдението е очевидно. Да разгледаме $2n+2$ числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+2}$. Тогава, ако $M = \max\limits_{1\leq k<2n+2} |x_{k+1} - x_k|$, то $|x_1 - x_2| \leq M$ и $\max\limits_{3\leq k<2n+2} |x_{k+1} - x_k| \leq M$.

Съгласно индукционната хипотеза числата $x_3, x_4, \ldots, x_{2n+2}$ могат да бъдат разделени на две групи A и B от по n числа, за които

$$|S(A) - S(B)| \leq \max_{3\leq k<2n+2} |x_{k+1} - x_k| \leq M.$$

Без ограничение можем да приемем, че $S(A) \geq S(B)$ и $x_1 \geq x_2$. Да разгледаме множествата $A \cup \{x_2\}$ и $B \cup \{x_1\}$. За съответните суми имаме

$$|S(A)+x_2-S(B)-x_1| = |(S(A)-S(B))-(x_1-x_2)| \leq \max\{S(A)-S(B), x_1-x_2\} \leq M.$$

Използвахме, че ако x и y са положителни числа, то $|x-y| \leq \max\{x, y\}$.

<u>**Оценяване**</u>: *Първи начин.* 1 т. за въвеждане на редица $\{C_i\}$ със свойствата, описани в решението; 2 т. за конструиране на $\{C_j\}$ в явен вид; 4 т. за довършване на решението.

Задача 10.1. Да се реши неравенството

$$\sqrt{3-2^x} \leqq 3-4^x.$$

Решение Полагаме $t = 2^x > 0$ и получаваме неравенството $\sqrt{3-t} \leqq 3-t^2$. От тук следва, че $t \in (0, \sqrt{3}]$ и след повдигане на квадрат достигаме до еквивалентното неравенство

$$t^4 - 6t^2 + t + 6 \geqq 0.$$

По схемата на Хорнер представяме последното във вида $(t+1)(t-2)(t^2+t-3) \geqq 0$. Предвид факта, че $t \in (0, \sqrt{3}]$ достигаме до $t \in \left(0, \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\right]$ и следователно

$$x \in \left(-\infty, \log_2 \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right].$$

<u>**Оценяване**</u>: 1 т. за $t = 2^x > 0$ и достигане до $\sqrt{3-t} \leqq 3-t^2$; 1 т. за $t \in (0, \sqrt{3}]$ и достигане до $t^4-6t^2+t+6 \geqq 0$; 1 т. за $(t+1)(t-2)(t^2+t-3) \geqq 0$; 2 т. за $t \in \left(0, \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\right]$; 1 т. за окончателния отговор.

Задача 10.2. Даден е квадратният тричлен $f(x) = x^2 + 2x + b$, където b е реален параметър. Да се намерят всички стойности на b, за които уравнението $f(f(x)) = 0$ има точно три различни реални корена.

Решение. *Първи начин.* Ако $f(x) = 0$ има корени $\alpha_1 < \alpha_2$, то корените на $f(f(x)) = 0$ съвпадат с корените на $f(x) = \alpha_1$ и $f(x) = \alpha_2$. При това е ясно, че за да съществуват точно три различни корена е необходимо и достатъчно $f(x) = \alpha_1$ да има точно един двоен корен.

Минимумът на $f(x)$ се достига за $x = -1$ и е равен на $b-1$. Следователно $\alpha_1 = b-1$ и $f(b-1) = 0$, откъдето $b^2 + b - 1 = 0$. Това уравнение има за корени числата $(-1 \pm \sqrt{5})/2$.

При $b = (-1+\sqrt{5})/2$ имаме

$$\alpha_1 = b - 1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} > \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

и тази стойност на b не е решение на задачата.

При $b = (-1-\sqrt{5})/2$ имаме

$$\alpha_1 = b - 1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2},$$

и от $\alpha_1+\alpha_2 = -1$ следва, че α_1 наистина е по-малкият корен на $f(x) = 0$. Окончателно $b = (-1-\sqrt{5})/2$.

Втори начин (Н. Николов). Записваме във вида $f(x) = (x+1)^2 + c$, $c = b - 1$, откъдето

$$f(f(x)) = (x+1)^4 + 2(c+1)(x+1)^2 + c^2 + 3c + 1 = 0.$$

Единият корен на това уравнение трябва да е нула, а другият – положителен. Оттук получаваме $c = (-3-\sqrt{5})/2$ и $b = c+1 = (-1-\sqrt{5})/2$.

Оценяване: 4 т. за намиране стойностите на b; 2 т. за отхвърляне на едната.

Задача 10.3. Даден е $\triangle ABC$ с ортоцентър H и медицентър G. Ако G лежи на окръжността с диаметър CH, то

а) да се докаже, че точките A, B, G и H лежат на една окръжност;

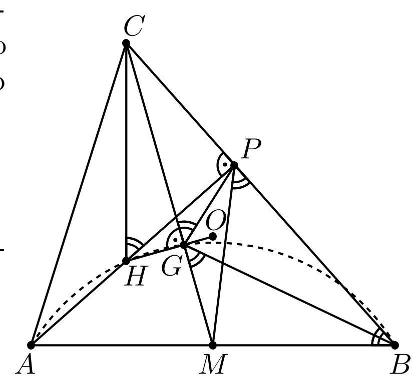
б) да се намери най-голямата възможна стойност на $\sphericalangle ACB$.

Решение а) Очевидно $\triangle ABC$ е остроъгълен, H е вътрешна точка и ще разгледаме нетривиалния случай, когато $G \not\equiv H$. Ако $CG^{\to} \cap AB = M$ и $AH^{\to} \cap BC = P$, то M е среда на AB и P лежи на окръжността с диаметър CH както G. Така получаваме, че

$$\sphericalangle PGC = \sphericalangle PHC = 180^\circ - \sphericalangle AHC = \sphericalangle ABC$$

и следователно четириъгълникът $MBPG$ е вписан в окръжност. Тогава $\sphericalangle BGM = \sphericalangle BPM = \sphericalangle ABC$ и

$$\sphericalangle BAH + \sphericalangle BGH = \sphericalangle BAH + 90^\circ + \sphericalangle ABC = 180^\circ,$$



което доказва твърдението.

б) (*I начин*) Ако $G \equiv H$, то $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Нека $G \not\equiv H$ и O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Известно е, че H, G и O лежат на една права (т.нар. *права на Ойлер*) и G дели отсечката HO в отношение $2:1$. В частност, O е външна за отсечката HG, т.е. O е външна за окръжността, минаваща през A, B, G и H. Тогава

$$\sphericalangle AOB < \sphericalangle AHB \Rightarrow 2\sphericalangle ACB < 180^\circ - \sphericalangle ACB \Rightarrow \sphericalangle ACB < 60^\circ.$$

Така търсената максимална стойност на $\sphericalangle ACB$ е 60° и се достига единствено при равностранен триъгълник.

(*II начин*) От $\sphericalangle BGM = \sphericalangle ABC$ следва, че $\triangle MBG \sim \triangle MCB$. Тогава $MB^2 = MG.MC = \dfrac{MC^2}{3}$ и от формулата за медиана в триъгълник при стандартни означения достигаме до равенството $a^2+b^2=2c^2$. Така получаваме, че

$$\cos\sphericalangle ACB = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a^2+b^2}{4ab} \geqq \frac{1}{2} \Rightarrow \sphericalangle ACB \leqq 60^\circ.$$

<u>Оценяване</u>: а) 1 т. за $MBPG$ – вписан четириъгълник; 2 т. за $ABGH$ – вписан четириъгълник; б) (*I начин*) 2 т. за съображението, че G лежи на отсечката HO; 2 т. за $\sphericalangle ACB \leqq 60^\circ$. (*II начин*) 2 т. за $a^2+b^2=2c^2$; 2 т. за $\sphericalangle ACB \leqq 60^\circ$.

Задача 10.4. Виж зад. 9.4.

Задача 11.1. Да се намерят всички цели стойности на реалния параметър a, за които съществува цяло, различно от нула число, което е решение на уравнението

$$a4^x + (a-1)9^x = (2a-1)6^x.$$

Решение. След разделяне на 9^x и полагане $t = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$, получаваме уравнението

$$at^2 - (2a-1)t + a - 1 = 0. \tag{1}$$

При $a=0$ получаваме $t=1$, откъдето $x=0$. При $a \neq 0$ корените на уравнението (1) са $t_1 = 1$ и $t_2 = \dfrac{a-1}{a}$. При $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 1$ получаваме $x=0$. Нека $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{a-1}{a}$.

Директно се проверява, че при $a \geq 4$ или $a \leq -3$ са изпълнени неравенствата

$$\frac{3}{2} > \frac{a-1}{a} > \frac{2}{3}. \tag{1}$$

Тъй като при $x \geq 1$ имаме $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x \leq \dfrac{2}{3}$, а при $x \leq -1$ е изпълнено $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x \geq \dfrac{3}{2}$ неравенствата (1) показват, че решение можем да имаме само при $-2 \leq a \leq 3$. Директна проверка показва, че само при $a = -2$ и $a = 3$ получаваме цели решения съответно $x = -1$ и $x = 1$.

Окончателно търсените стойности са $a = -2$ и $a = 3$.

Оценяване: 2 т. за получаване на t_1 и t_2; по 1 т. за намиране на всяка от двете стойности на a и 2 т. за доказване, че няма други стойности.

Задача 11.2. Даден е трапец $ABCD$, $AB \parallel CD$, за който $AD = 6$, $DC = 3$ и $BC = 12$. Ъглополовящата на $\sphericalangle ABC$ пресича страната AD в точка M, като $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{5}{3}$.

а) Да се докаже, че в $ABCD$ може да се впише окръжност.

б) Да се намери дължината на отсечката OM, където O е центърът на вписаната в $ABCD$ окръжност.

Решение. а) Да означим с N пресечната точка на продължението на BM и правата CD. Тъй като $\sphericalangle BNC = \sphericalangle ABM = \sphericalangle NBC$, то $NC = BC$. Следователно $DN = NC - DC = 12 - 3 = 9$ и от подобието на $\triangle DNM$ и $\triangle ABM$ намираме $\dfrac{AB}{DN} = \dfrac{AM}{DM} = \dfrac{5}{3}$, т.е. $AB = 15$. Понеже $AB + CD = AD + BC = 18$, то в $ABCD$ може да се впише окръжност.

б) Ако P е пресечната точка на AD и BC, от подобието на $\triangle DCP$ и $\triangle ABP$, намираме $\dfrac{PC}{PC + CB} = \dfrac{DC}{AB} = \dfrac{1}{5}$. От това равенство получаваме $PC = 3$, т.е. $AB = PB$. Следователно $BO \perp AP$, което означава, че OM е радиусът на вписаната в $ABCD$ окръжност.

Тъй като $AM = \dfrac{15}{4}$, от правоъгълния $\triangle AMB$ пресмятаме $BM = \dfrac{15}{4}\sqrt{15}$ и понеже AO е ъглополовяща на $\sphericalangle BAM$, имаме $\dfrac{OM}{BM - OM} = \dfrac{AM}{AB}$. От това равенство пресмятаме $OM = \dfrac{3}{4}\sqrt{15}$.

Оценяване: 3 т. за а) и 3 т. за б).

Задача 11.3. В държава има 2012 града. Между някои от градовете са прекарани пътища, като от всеки град може да се стигне до всеки друг. Известно е, че ако два града са свързани с път, то общият брой пътища, излизащи от тези два града е нечетно число. Колко най-много са прекараните пътища?

Решение. Да разделим градовете на две групи P и Q по следния начин. В P влизат всички градове, от които излизат четен брой пътища, а в Q влизат всички градове, от които излизат нечетен брой пътища. Нека $|P| = p$ и $|Q| = q$, като $p + q = 2012$. Според условието на задачата няма път, който да свързва два града от P или два града от Q. Това означава, че всеки път свързва град от P с град от Q. Тъй като от всеки град от P излизат четен брой пътища, то общият брой пътища е четно число. Оттук и от условието, че от всеки град от Q излизат нечетен брой пътища, следва че q е четно число.

Понеже $p + q = 2012$, то p също е четно число. Това означава, че от всеки град от Q излизат най-много $p - 1$ пътя. Следователно, ако $p = 2p_0$ и $q = 2q_0$, пътищата са най-много $2q_0(2p_0 - 1)$. Тъй като $2q_0 + (2p_0 - 1) = 2011$, то най-голямата стойност на $2q_0(2p_0 - 1)$ се достига когато $2q_0$ и $2p_0 - 1$ са почти равни, т.е. $2q_0 = 1006$ и $2p_0 - 1 = 1005$. Тогава пътищата са $1005.1006 = 1011030$.

Ще построим пример, за който пътищата са точно 1006.1005. Нека $A_1, A_2, \dots, A_{1006}$ и $B_1, B_2, \dots, B_{1006}$ са съответно градовете в P и Q. Свързваме всеки от градовете $B_1, B_2, \dots, B_{1004}$ с всеки от градовете $A_1, A_2, \dots, A_{1005}$. Свързваме B_{1005} и B_{1006} с всеки от $A_2, A_3, \dots, A_{1006}$. Директно се проверява, че пътищата са 1006.1005 и от всеки град може да се стигне до всеки друг.

Оценяване: 1 т. за наблюдението, че графът е двуделен; 1 т. за наблюдението, че p и q са четни; 3 т. за определяне на максимума на $2q_0(2p_0 - 1)$ при $2q_0 + (2p_0 - 1) = 2011$; 2 т. за пример, че този максимум се достига.

Задача 11.4. Нека a, m и n са естествени числа, като a е четно и $m < n$. Да се докаже, че едно от числата

$$a^m + 1, a^{m+1} + 1, a^{m+2} + 1, \dots, a^n + 1$$

е взаимно просто с всяко от останалите числа.

Решение. Да означим с k най-голямата степен на двойката, която дели някое от числата $m, m + 1, \dots, n$. Да допуснем, че има две числа, които се делят на 2^k. Тези числа се представят във вида $2^k t_1$ и $2^k t_2$, където $t_1 < t_2$ са нечетни числа. Числото $2^k(t_1 + 1) < 2^k t_2$ се дели на 2^{k+1}, което е противоречие с избора на k.

Следователно съществува число $r, m \le r \le n$, което се дели на 2^k и всяко друго число не се дели на 2^k. Ще докажем, че числото $a^r + 1$ е взаимно просто с всяко от останалите числа. Нека p е прост делител на $a^r + 1$. Тъй като a е четно, то p е нечетно число и тогава p не дели $a^r - 1$. Ако l е показателят на a по модул p, то l дели $2r$ (защото $a^{2r} - 1$ се дели на p), но не дели r (защото $a^r - 1$ не се дели на p). Следователно l се дели на 2^{k+1}.

Да допуснем, че p дели $a^s + 1$ за $s \ne r$. Това означава, че l дели $2s$, т.е. 2^k дели s, което е противоречие.

Показахме, че всеки прост делител на $a^r + 1$ не дели нито едно от останалите числа. Следователно $a^r + 1$ е взаимно просто с всяко от останалите числа.

Оценяване: 1 т. за доказване, че има единствено число, което се дели на 2^k; 1 т. за правилния избор на степента r; 1 т. за разглеждане на показателя на a по модул p; 4 т. за довършване.

Задача 12.1 Да се намерят всички естествени числа n, за които уравнението

$$\log_n(\sin \pi x) = \sin^2(\log_n x^\pi)$$

има решение в реални числа.

Решение. Понеже $\sin \pi x \le 1$ и $n > 1$, то $\log_n(\sin \pi x) \le 0 \le \sin^2(\log_n x^\pi)$. Следователно $\log_n(\sin \pi x) = \sin^2(\log_n x^\pi)$ точно когато $\sin \pi x = 1$, т.е. $x = 2k + 1/2$, и $\log_n x^\pi = m\pi$, където $k, m \in \mathbb{Z}$. Оттук $2k + 1/2 = n^m$ и тогава лесно следва, че $k = 0$, $n = 2$ и $m = -1$.

Оценяване: 1 т. за $\log_n(\sin \pi x) \le 0$; 2 т. за $\sin \pi x = 1$; 3 т. за довършване на решението.

Задача 12.2. Да се намерят всички реални числа c такива, че редицата, дефинирана чрез равенствата $a_0 = 0$ и $a_{n+1} = a_n^2 + c$ при $n \ge 0$, е ограничена.

Решение. Следните твърдения се получават по индукция:

ако $c \in [0, 1/4]$, то $a_n \le 1/2$; ако $c \in [-2, 0]$, то $c \le a_n \le -c$;

ако $c > 1/4$, то $a_{n+1} > a_n$; ако $c < -2$, то $a_{n+1} > a_n > -c$ при $n \ge 2$.

В третия случай уравнението $x = x^2 + c$ няма реални корени и значи редицата (a_n) не е сходяща, откъдето $a_n \to +\infty$. Същото следва и в четвъртия случай, понеже тогава корените на уравнението са по-малки от $-c$.

И така, отговорът е $c \in [-2, 1/4]$.

Забележки. 1. В първия случай редицата е монотонно растяща и значи сходяща. Може да се докаже, че тя сходяща и при $c \in [-3/4, 0)$ (за повече подробности вж. т. нар. логистична функция).

2. Множеството на Малденброт се състои от всички комплексни числа c такива, че редицата от условието на задачата е ограничена. Това множество се съдържа в затворения кръг с център началото и радиус 2.

Оценяване: 3 т. за случая $c \in (-2, 0)$; по 1 т. за останалите 3 случая.

Задача 12.3. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, за който $AB = 2$, $AD = 3$ и $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$. Да се намерят дължините на страните BC и CD, ако е известно, че те са естествени числа.

Решение. Нека $BC = x$, $CD = y$ и $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = \alpha$. От косинусовата теорема следва, че $2^2 + 3^2 - 12\cos\alpha = BD^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha$, откъдето

$$(*) \qquad x^2 + y^2 - 13 = 2(xy - 6)\cos\alpha.$$

Случай 1. $xy = 6$. От $x^2 + y^2 = 13$ получаваме, че $x = 2, y = 3$ или $x = 3$, $y = 2$. В първия случай $ABCD$ е делтоид, а във втория – успоредник.

Случай 2. $xy > 6$. Ако $x \ne y$, то

$$x^2 + y^2 > 2xy + 1 = 2(xy - 6) + 13 > 2(xy - 6)\cos\alpha + 13,$$

което е противоречие със $(*)$.

Следователно $x = y \geq 3$. Нека $\sphericalangle CBD = \beta$, $\sphericalangle ABD = \gamma$ и $\sphericalangle ADB = \delta$. От синусовата теорема следва, че

$$\frac{x}{\sin\beta} = \frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{3}{\sin\gamma}.$$

Понеже $x \geq 3$, то $\sin\beta \geq \sin\gamma$. Сега от $\beta + \gamma < \pi$, получаваме, че $\beta \geq \gamma$. От друга страна, от $AB = 2 < 3 = AD$ следва, че $\delta < \gamma$ и значи $\pi - \alpha = \delta + \gamma < 2\gamma \leq 2\beta = \pi - \alpha$, което отново е противоречие.

Случай 3. $xy < 6$. От $(*)$ следва, че

$$-1 < \frac{x^2 + y^2 - 13}{2(6 - xy)} < 1,$$

т.е. $|x - y| > 1$ и $x + y < 5$. Понеже x и y са естествени числа, то $x = 1$, $y = 3$ или $x = 3$, $y = 1$. И в двата случая от $(*)$ следва $\cos\alpha = 1/2$.

Ако $y = 3$, то $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACD$. Понеже $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$, получаваме, че $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA$, т.е. $AB = BC$ – противоречие.

В случая $x = 3$, $y = 1$ полученият четириъгълник $ABCD$ е изпъкнал. Имаме да проверим, че $\sphericalangle ADC < 180^\circ$ и $ABC < 180^\circ$. От косинусовата теорема намираме, че $BD = \sqrt{7}$. Следователно $\triangle ABD$ е остроъгълен, а $\sphericalangle BDC > 90^\circ$. Оттук $\sphericalangle ABC < 180^\circ$. Също така $\frac{2}{\sin\sphericalangle ADB} = \frac{3}{\sin\sphericalangle BDC}$ и значи $\sin\sphericalangle ADB < \sin\sphericalangle BDC$. Понеже първият ъгъл е остър, а вторият – тъп, следва, че тяхната сума, т.е. мярката на $\sphericalangle ADC$, е по-малка от 180°.

Отговор: $(BC, CD) = (2, 3)$, $(3, 2)$ или $(3, 1)$.

Оценяване: 2 т. за равенството $(*)$; 1 т. за случай 1; 2 т. за случай 2; 2 т. за случай 3.

Задача 12.4. Виж зад. 11.4.

Задачите са предложени от: 9.1.– Петър Бойваленков, 9.2. – Керопе Чакърян; 9.3. – Петър Бойваленков и Керопе Чакърян; 9.4.(10.4.), 10.2. – Иван Ланджев; 10.1., 10.3. – Стоян Боев; 11.4.(12.4.), 11.2. – Александър Иванов; 11.1., 11.3. – Емил Колев; 12.1., 12.3. – Николай Николов и Олег Мушкаров; 12.2. – Николай Николов.